

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 19 aprile 2004

b43315

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	B	D	C	B	D

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale $-1/2$, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Data la funzione $f(x, y) = \ln(1 - x^2 + y^2)$, e la curva parametrica $\vec{r}(t) = (\sinh(3t), \cosh(3t))$, si consideri la funzione composta $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☐ A $\exists t \in \mathbb{R}$ per cui si ha $\phi'(t) = -1$.

☐ B $\phi'(0) = 6 \ln 2$.

☐ C $\phi'(1) = e^{-3}$.

☒ D $\phi'(t) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)\alpha^n}{3n^2-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A Se $|\alpha| = 1$, allora la serie è convergente.

☒ B Per ogni $\alpha \in [-1, 1[$ la serie è convergente.

☐ C Per ogni $\alpha > 0$ la serie non è convergente.

☐ D Per ogni $\alpha < 1$ la serie è convergente.

ESERCIZIO 3. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D x \sqrt{y} \, dx dy.$$

Si ha.

☐ A $I = -\frac{4}{7}.$

☐ B $I = \frac{2}{3}.$

☐ C $I = \frac{10}{7}.$

☒ D $I = \frac{4}{21}.$

ESERCIZIO 4. Data una funzione derivabile $f : D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; xy \neq -1\} \rightarrow \mathbb{R}$, con derivate parziali ovunque nulle, e tale che $f(0, 0) = 0$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

☐ A $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D.$

☐ B $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \text{t.c.} \quad xy < -1.$

☒ C $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \text{t.c.} \quad xy > -1.$

☐ D $f(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \in D \quad \text{t.c.} \quad xy \leq 0.$

ESERCIZIO 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x \dot{y} = 2(1 + y^2), \\ y(1) = -1. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

☐ A φ è una funzione limitata.

☒ B $x = e^{\frac{\pi}{8}}$ è uno zero di φ .

☐ C $x = \frac{\pi}{4}$ è uno zero di φ .

☐ D φ è definita su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 6. Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui è convergente l'integrale

$$I = \int_0^1 \frac{\tan(x^3) e^x}{\sqrt[3]{1+x^\alpha} - 1} \, dx.$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{y}{3} + o(y^2)$ per $y \rightarrow 0$).

☐ A Esiste $\alpha \in [4, 12[$ per cui I è convergente.

☐ B I è convergente per ogni $\alpha > 3$.

☐ C I non è convergente per ogni $\alpha < 1$.

☒ D I è convergente per ogni $\alpha < 4$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica γ di equazione (in coordinate polari):
 $\rho = \cos^2 \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$.

(i) Scrivere le equazioni della curva γ in coordinate cartesiane e determinare eventuali punti di intersezione con gli assi cartesiani.

$$\begin{cases} x(\theta) = \cos^3 \theta, \\ y(\theta) = \cos^2 \theta \sin \theta, \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

$$\text{asse } x : \quad x = 0, \quad x = -1, \quad x = 1.$$

$$\text{asse } y : \quad y = 0.$$

(ii) Determinare i punti regolari della curva γ .

L'unico punto non regolare di γ è $(0, 0)$.

(iii) Scrivere l'equazione della retta tangente a γ nel punto di coordinate polari $\theta = \pi, \rho = 1$.

La retta tangente a γ in $(-1, 0)$ è $x = -1$.

(iv) Calcolare l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} \frac{y}{x^{\frac{2}{3}}} ds$.

$$I = 0.$$

(v) Tracciare la traiettoria probabile della curva.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = x^2y - xy^2 + xy$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Punti critici: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$, $(-1/3, 1/3)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di minimo (assoluto): $(-1/3, 1/3)$.

Punti di sella: $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$.

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di f alla frontiera della regione

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x \leq 1, x \leq 0, y \geq 0\}.$$

$$f(\partial T) = \{0\}.$$

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f alla regione T .

$$f(T) = [-1/27, 0].$$