

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA L-B

Ing. Informatica (L-Z) ed Ing. Energetica

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2004/2005, 18 Aprile 2005

c43297

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

CORSO DI LAUREA:

1	2	3	4	5	6
D	B	B	C	C	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti).

ESERCIZIO 1. Determinare l'immagine della funzione definita da

$$f(x, y) = \exp\left(\frac{2xy}{x^2 + y^2}\right).$$

Si ha:

- ☐ A $\text{Im}(f) = \mathbb{R}.$
- ☐ B $\text{Im}(f) =]0, +\infty[.$
- ☐ C $\text{Im}(f) = [0, e^2].$
- ☒ D $\text{Im}(f) = [e^{-1}, e].$

ESERCIZIO 2. Calcolare il volume V della regione

$$R \doteq \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2 \right\}.$$

Si ha:

- ☐ A $V = \frac{1}{4}.$
- ☒ B $V = \frac{\pi}{2}.$
- ☐ C $V = 0.$
- ☐ D $V = \frac{2\pi}{3}.$

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x, y) = \int_0^{\ln(1+xy)} \frac{e^t}{1+t^2} dt,$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y).$
- ☒ B $x f_x(x, y) - y f_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y).$
- ☐ C Esiste $(x, y) \neq (0, 0)$ per cui $y f_x(x, y) + x f_y(x, y) = 0.$
- ☐ D $y f_x(x, y) + x f_y(x, y) - x^2 + y^2 \neq 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$

ESERCIZIO 4. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = t$, $y(t) = \ln t$, $t \in [1, 2]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} x^2 ds$. Si ha:

- ☐ A $I = \frac{5\sqrt{5}}{3}.$
- ☐ B $I = \frac{5\sqrt{5} - 2}{3}.$
- ☒ C $I = \frac{5\sqrt{5} - 2\sqrt{2}}{3}.$
- ☐ D $I = 0.$

ESERCIZIO 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$ la soluzione (massimale) del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \sqrt{xy}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A φ è definita su tutto $\mathbb{R}$.
- ☐ B φ ha massimo assoluto.
- ☒ C $\varphi(x) \geq 0$ per ogni x .
- ☐ D φ è strettamente decrescente su un intervallo del suo dominio.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \cos(n\pi) \ln \left(1 + \frac{1}{n^\alpha} \right), \quad \alpha > 0,$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A La serie è assolutamente convergente per ogni $\alpha > 0$.
- ☒ B La serie è convergente per ogni $\alpha > 0$.
- ☐ C Esiste $\alpha \in]0, 1]$ per cui la serie non è convergente.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \ln(2 + xy)$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Unico punto critico: $(0, 0)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di sella: $(0, 0)$.

(iii) Determinare l'immagine di f :

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

(iv) Determinare gli estremi della restrizione di f alla regione

$$S = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 2 \right\}.$$

$$\min_S f = 0, \quad \max_S f = \ln 3.$$

(v) Determinare l'immagine della restrizione di f alla regione

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2 \right\}.$$

$$f(B) = [0, \ln 3].$$