

III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2002/2003, 23 giugno 2003

a31275

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
D	C	C	A	B	C

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = t^2$, $y(t) = \cos t$, $t \in [0, 4\pi]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_{\gamma} \frac{y^2}{\sqrt{1+4x-y^2}} ds$. Si ha:

- ☐ A $I = 2$.
- ☐ B $I = -4\pi$.
- ☐ C $I = 0$.
- ☒ D $I = 2\pi$.

ESERCIZIO 2. Calcolare l'area A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa

$$\vec{r}(\theta) = \begin{cases} (\theta \cos \theta, \theta \sin \theta) & \text{se } \theta \in [0, \pi], \\ (\theta - 2\pi, 0) & \text{se } \theta \in [\pi, 2\pi]. \end{cases}$$

- ☐ A $A = 2\pi^2$.
- ☐ B $A = 0$.
- ☒ C $A = \pi^3/6$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 3. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A $y f_x(x, x) + x f_y(x, x) = 1 \quad \forall x \neq 0.$
- ☐ B Esiste $(x, y) \neq (0, 0)$ per cui $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = -1.$
- ☒ C $x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$
- ☐ D $y f_x(x, y) + x f_y(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0).$

ESERCIZIO 4. Fissati $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_{\alpha, \beta}(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + \dot{y} - 2y = e^t, \quad y(0) = \alpha, \quad \dot{y}(0) = \beta,$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha, \beta) \doteq \lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi_{\alpha, \beta}(t)$. Si ha:

- ☒ A $\ell(\alpha, \beta) = +\infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
- ☐ B Esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}.$
- ☐ C Esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha, \beta) = -\infty.$
- ☐ D $\ell(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

ESERCIZIO 5. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 2, \ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D x^2 y \, dx dy.$$

Si ha:

- ☐ A $I = 4/15.$
- ☒ B $I = 64/15.$
- ☐ C $I = -47/15.$
- ☐ D $I = 0.$

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} \ln n}$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ A La serie non è convergente.
- ☐ B La serie è assolutamente convergente.
- ☒ C La serie è convergente.
- ☐ D La serie diverge positivamente.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = x^4 + 4y^4 - 4xy$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

$$\text{Punti critici:} \quad (0, 0), \quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right), \quad \left(\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{8}} \right).$$

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

$$\text{Punto di sella:} \quad (0, 0).$$

$$\text{Punti di minimo (assoluto):} \quad \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \right), \quad \left(\frac{-1}{\sqrt[4]{2}}, \frac{-1}{\sqrt[4]{8}} \right).$$

(iii) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) = [-1, +\infty[.$$

(iv) Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

$$\text{Il limite esiste} \quad \forall \alpha \leq 1.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = \sqrt{y - 2x^2}$.

(i) Determinare il dominio naturale di f :

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 2x^2\}$$

(ii) Determinare eventuali estremi di f vincolati sulla frontiera dell'insieme

$$A = \{(x, y) \in \text{Dom}(f) : x \geq 0, 2y \leq 1 + x^2\}$$

e stabilirne la natura.

$$\text{Estremi vincolati su } \partial A: \quad (0, 0), \quad (0, 1/2), \quad (1/\sqrt{3}, 2/3).$$

$$\text{Punti di minimo relativo vincolati su } \partial A: \quad (0, 0), \quad (1/\sqrt{3}, 2/3).$$

$$\text{Punti di massimo relativo vincolati su } \partial A: \quad (0, 1/2).$$

(iii) Determinare l'immagine della restrizione della funzione all'insieme A :

$$\text{Im}(f \upharpoonright_A) = [0, 1/\sqrt{2}].$$

(iv) Stabilire quali sono i punti (x_0, y_0) regolari delle curve di livello di f

$$E_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = c\}, \quad c \in \mathbb{R},$$

(E_c si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti delle curve di livello E_c sono regolari.

(v) Scrivere l'equazione della retta tangente alla curva di livello E_1 nel punto $(1, 3)$.

$$\text{Retta tangente ad } E_1 \text{ in } (1, 3): \quad y - 4x + 1 = 0.$$

(vi) Determinare un versore ortogonale alla curva di livello E_1 nel punto $(1, 3)$.

$$\text{Spazio normale ad } E_1 \text{ in } (1, 3): \quad \{\lambda(-4, 1) : \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$$\text{Versore ortogonale ad } E_1 \text{ in } (1, 3): \quad (-4/\sqrt{17}, 1/\sqrt{17}).$$