

# III APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 28 giugno 2004

a21542

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

|   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| A | D | A | C | B | C |

**N.B.** Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

**ESERCIZIO 1.** Date due funzioni differenziabili  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , ed una curva parametrica regolare  $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , tale che  $\vec{r}(0) = (0, 0)$ , si considerino le funzioni composte  $\phi(t) = f(\vec{r}(t))$ ,  $\psi(t) = g(\vec{r}(t))$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☒ Se  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ ,  $\nabla g(0, 0) = (-1, 0)$ , allora  $\phi'(0)x'(0) + \psi'(0)y'(0) = 0$ .
- ☐ Se  $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ ,  $\nabla g(0, 0) = (-1, 0)$ , allora  $\phi'(0)x'(0) + \psi'(0)y'(0) < 0$ .
- ☐ Se  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ ,  $\nabla g(0, 0) = (0, 1)$ , allora  $\phi'(0)x'(0) + \psi'(0)y'(0) = 0$ .
- ☐ Se  $\nabla f(0, 0) = (1, 0)$ ,  $\nabla g(0, 0) = (-1, 0)$ , allora  $(\phi'(0) - \psi'(0))x'(0) < 0$ .

**ESERCIZIO 2.** Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{1 + e^{\alpha n}}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- ☐ Per ogni  $\alpha \in ]0, 2[$  la serie non è convergente.
- ☐ La serie è convergente per ogni  $\alpha \in \mathbb{R}$ .
- ☐ Esiste  $\alpha \leq 0$ , per cui la serie è convergente.
- ☒ Per ogni  $\alpha > 0$  la serie è convergente.

**ESERCIZIO 3.** Data una funzione continua  $f : D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \neq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☒ Se  $f(0, 0) \cdot \left( \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y) \right) < 0$  allora  $f$  ha almeno uno zero.
- ☐ Se  $f(0, 0) \cdot \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) \right) < 0$  allora  $f$  ha almeno uno zero.
- ☐ Se  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x, 0) = -\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x, 0) = +\infty$ , allora  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ .
- ☐ Se  $f(0, 0) = 0$ , e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x, x) = +\infty$ , allora  $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$ .

**ESERCIZIO 4.** Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : e^{-2} \leq x^2 + y^2 \leq e^2\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D \ln(\sqrt{x^2 + y^2}) \, dx dy.$$

Si ha.

- ☐  $I = \frac{e}{4} + \frac{1}{2e}$ .
- ☐  $I = \pi(e^2 + e^{-2})$ .
- ☒  $I = \frac{\pi}{2}(e^2 + 3e^{-2})$ .
- ☐ Nessuna delle altre risposte è corretta.

**ESERCIZIO 5.** Sia  $\varphi(x; c_1, c_2)$  l'integrale generale dell'equazione di Eulero

$$x^2 \ddot{y} + 5x \dot{y} + 4y = 16x^2, \quad x > 0,$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x; c_1, c_2).$$

Allora si ha:

- ☐ Non esistono  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell(c_1, c_2) = 0$ .
- ☒ Esistono  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell(c_1, c_2) = -\infty$ .
- ☐ Non esistono  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  t.c.  $\ell(c_1, c_2) = +\infty$ .
- ☐  $|\ell(c_1, c_2)| = +\infty$  per ogni  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

**ESERCIZIO 6.** Determinare per quali valori  $\alpha, \beta \geq 0$  è convergente l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta} \, dx.$$

- ☐ Per ogni  $\beta > 1, \alpha \geq 0, I$  non è convergente.
- ☐ Per ogni  $\alpha, \beta \geq 0$  tali che  $\alpha < \beta, I$  è convergente.
- ☒ Per ogni  $\alpha, \beta \geq 0$  tali che  $\beta < 1 + \alpha, I$  è convergente.
- ☐ Nessuna delle altre risposte è corretta.

**ESERCIZIO 7.** Si consideri la curva parametrica  $\vec{r} : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$  definita da

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (t, t^2 - 1) & \text{se } t \in [-1, 1] \\ (-\cos(\pi t), \sin(\pi t)) & \text{se } t \in ]1, 2] \end{cases}$$

(i) Determinare eventuali punti di discontinuità di  $\vec{r}$  e stabilire se è una curva chiusa.

$\vec{r}$  è una curva continua e chiusa.

(ii) Determinare eventuali punti di intersezione della curva  $\vec{r}$  con gli assi cartesiani e tracciare la traiettoria probabile della curva.

asse  $x$  :  $x = -1, x = 1$ .

asse  $y$  :  $y = -1$ .

(iii) Determinare i punti regolari della curva  $\vec{r}$ .

I punti non regolari di  $\vec{r}$  sono:  $\vec{r}(-1) = \vec{r}(2) = (-1, 0), \quad \vec{r}(1) = (1, 0)$ .

(iv) Calcolare la lunghezza della restrizione della curva  $\vec{r}$  all'intervallo  $[1, 2]$ .

$$L(\vec{r}|_{[1, 2]}) = \pi.$$

(v) Calcolare la lunghezza della curva  $\vec{r}$ . (Si ricorda che un integrale del tipo  $\int \sqrt{1 + a^2 t^2} dt$  si può calcolare mediante cambiamento di variabile  $t = \frac{\sinh \theta}{a}$ , ottenendo  $\int \sqrt{1 + a^2 t^2} dt = \frac{1}{2a} (\text{sett} \sinh(at) + at\sqrt{1 + a^2 t^2}) + c$ , dove  $\text{sett} \sinh z = \ln(z + \sqrt{1 + z^2})$ ).

$$L(\vec{r}) = \pi + \sqrt{5} + \ln \left( \sqrt{2 + \sqrt{5}} \right).$$

**ESERCIZIO 8.** Si consideri la funzione definita da  $f(x, y) = e^{-x^2} \sin y$ .

(i) Determinare eventuali punti critici di  $f$ .

$$\text{Punti critici: } (0, \pi/2 + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(ii) Determinare la natura dei punti critici della restrizione di  $f$  all'insieme  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ .

$$\text{Punto di massimo (assoluto): } (0, \pi/2).$$

$$\text{Punto di minimo (assoluto): } (0, 3\pi/2).$$

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di  $f$  all'insieme  $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$ .

$$f(\mathbb{R} \times [0, 2\pi]) = [-1, 1].$$

(iv) Determinare l'immagine della composizione di  $f$  con la curva  $\vec{r}(t) = (t, \arcsin t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

$$f \circ \vec{r}([0, 1]) = [0, 1/\sqrt{2e}].$$