

IV APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 12 luglio 2004

b21371

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
C	A	D	A	D	B

N.B. Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale $-1/2$, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.

ESERCIZIO 1. Data una funzione differenziabile $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow]0, +\infty[$, non costante, si consideri la funzione composta $g(x, y) = \arctan(f(x, y))$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ **A** Esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\nabla g(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \neq (0, 0)$.
- ☐ **B** Esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $\nabla g(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, $\nabla f(x_0, y_0) = (0, 0)$.
- ☒ **C** $\nabla f(x, y) = (1 + (f(x, y))^2) \nabla g(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}$.
- ☐ **D** $(f(x, y))^2 \nabla f(x, y) - (f(x, y))^4 \nabla g(x, y) = 0$, per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}$.

ESERCIZIO 2. Determinare per quali valori $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la seguente serie è convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n^\alpha}} - 1\right)^2}{n^\beta}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- ☒ **A** Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha > \frac{1-\beta}{2}$.
- ☐ **B** Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\alpha = \frac{1-\beta}{2}$.
- ☐ **C** Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}, \beta > 1$.
- ☐ **D** Per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\beta > \frac{1-\alpha}{2}$.

ESERCIZIO 3. Data una funzione continua $f : D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

- ☐ A L'immagine di f è un insieme limitato.
- ☐ B L'immagine di f è un insieme chiuso.
- ☐ C L'immagine di f è intervallo aperto.
- ☒ D L'immagine di f è intervallo.

ESERCIZIO 4. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq y, \ x \geq 0\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D \frac{x}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Si ha.

- ☒ A $I = \frac{1}{2}$.
- ☐ B $I = 0$.
- ☐ C $I = -\frac{3}{4}$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Sia $x \mapsto \varphi(x; c_1, c_2)$ l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$\ddot{y} - 2\dot{y} - 3y = \cos(2x),$$

e si consideri il limite

$$\ell(c_1, c_2) \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\varphi(x; c_1, c_2)}{x}.$$

Allora si ha:

- ☐ A $|\ell(c_1, c_2)| = +\infty$ per ogni $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
- ☐ B Non esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(c_1, c_2) = 0$.
- ☐ C Esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(c_1, c_2) = 1$.
- ☒ D Esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ t.c. $\ell(c_1, c_2) = -\infty$.

ESERCIZIO 6. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^\alpha} dx.$$

- ☐ A Per ogni $\alpha > 1$.
- ☒ B Per ogni $\alpha \in]1, 2[$.
- ☐ C Per ogni $\alpha > 2$.
- ☐ D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica $\vec{r} : \left[0, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln\left(1 + \frac{\pi}{3}\right)}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (\sqrt{\ln(1+t)} \cos t, \sqrt{\ln(1+t)} \sin t) & \text{se } t \in [0, \frac{\pi}{3}], \\ \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)} - t, \sqrt{3}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)} - t\right)\right) & \text{se } t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)}\right]. \end{cases}$$

(i) Determinare eventuali punti di discontinuità di $\vec{r}$ e stabilire se è una curva chiusa.

$\vec{r}$ è una curva continua e chiusa.

(ii) Determinare eventuali punti di intersezione della curva $\vec{r}$ con gli assi cartesiani e tracciare la traiettoria probabile della curva.

asse x : $x = 0$.

asse y : $y = 0$.

(iii) Determinare i punti regolari della curva $\vec{r}$.

I punti non regolari di $\vec{r}$ sono:

$$\vec{r}'(0) = \vec{r}'\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)}\right) = (0, 0), \quad \vec{r}'(\pi/3) = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)}, \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\ln(1+\pi/3)}\right).$$

(iv) Nel caso $\vec{r}$ sia una curva chiusa, calcolare l'area $A(\vec{r})$ della regione delimitata da $\vec{r}$.

$$A(\vec{r}) = (1 + \pi/3) \ln(1 + \pi/3) - \pi/3.$$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = xy^2 + 4xy - x^2$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f .

Punti critici: $(-2, -2), (0, 0), (0, -4)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f .

Punto di massimo relativo: $(-2, -2)$.

Punti di sella: $(0, 0), (0, -4)$.

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di f alla frontiera della regione

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq y^2 + 4y\}.$$

$$f(\partial T) = \{0\}.$$

(iv) Determinare l'immagine della restrizione di f alla regione T .

$$f(T) = [0, +\infty[.$$