III APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA L-B

Ing. Informatica (L-Z) ed Ing. Energetica

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2004/2005, 15 Luglio 2005

b17725

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

Corso di Laurea: ....

1	2	3	4	5	6

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4.5 punti, ogni risposta sbagliata vale -0.5, ogni risposta non data vale 0 punti. L'esercizio n. 7 vale 9 punti).*

ESERCIZIO 1. Determinare l'immagine della funzione definita da

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right).$$

Si ha:

A $\quad \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

B $\quad \mathrm{Im}(f) = \big[-\pi/2,\, \pi/2\big]$.

C $\quad \mathrm{Im}(f) = \big\{-\pi/2,\, \pi/2\big\}$.

D $\quad \mathrm{Im}(f) = \big]-\pi/4,\, \pi/4\big[$.

ESERCIZIO 2. Fissati $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ r > 0$, si consideri la regione

$$D_r \doteq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ :\ 1 \le x^2 + y^2 \le r^2\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I_\alpha(r) \doteq \iint_{D_r} \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\, dxdy\,.$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\quad$ Per ogni $\ \alpha > 1\ \lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.

B $\quad \lim\limits_{r\to+\infty} I_1(r)$ esiste finito.

C $\quad$ Esiste $\ \alpha < 1\ $ per cui $\ \lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r)$ esiste finito.

D $\quad$ Esiste $\ \alpha > 1\ $ per cui si ha $\ \lim\limits_{r\to+\infty} I_\alpha(r) = +\infty$.

ESERCIZIO 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A Esiste (x,y) per cui $x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y) \neq 0$.

B Esiste (x,y) per cui $x\, f_x(x,y) - y\, f_y(x,y) \neq 0$.

C Esiste (x,y) per cui $y\, f_x(x,y) + x\, f_y(x,y) \neq 0$.

D $f_x(x,y) + f_y(x,y) = 0 \qquad \forall\, (x,y)$.

ESERCIZIO 4. Calcolare l'area A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa

$$\vec{r}(\theta) = \begin{cases} \big(\theta\cos\theta,\ \theta\sin\theta\big) & \text{se} \quad \theta \in [0,\, \pi]\,, \\ \big(\theta - 2\pi,\ 0\big) & \text{se} \quad \theta \in [\pi,\, 2\pi]\,. \end{cases}$$

A $A = 2\pi^2$.

B $A = 0$.

C $A = \pi^3/6$.

D Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Sia $t \mapsto \varphi(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + 4y = \cos t, \qquad y(0) = 0, \qquad \dot{y}(0) = 1\,.$$

Si ha:

A $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

B $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$.

C $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

D $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3}$.

ESERCIZIO 6. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{n^2}\right)^{\alpha}}{e^{\frac{1}{n}}} \qquad \alpha > 0\,,$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A La serie converge per ogni $\alpha > \frac{1}{2}$.

B La serie diverge per $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

C La serie converge per ogni $\alpha > 0$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = \dfrac{xy}{1+x^2+y^2}$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

(iii) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) =$$

(iv) Determinare gli estremi della restrizione di f alla circonferenza unitaria $S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2+y^2 = 1\}$.

$$\min_{S_1} f = \qquad\qquad \max_{S_1} f =$$

(v) Determinare l'immagine tramite f della palla unitaria $B_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 1\}$.

$$f(B_1) =$$