V APPELLO DI ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: Fabio Ancona)

A.A. 2002/2003, 10 settembre 2003

a53272

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6
D	C	D	C	C	B

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Si consideri la funzione $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ $f_{xx}(x,y) - f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.

$\boxed{\text{B}}$ $f_{xx}(x,y) + f_{xy}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.

$\boxed{\text{C}}$ $f_x(x,y) - f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.

$\boxed{\text{D}}$ $f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y) = 0 \qquad \forall\ (x,y) \neq (0,0)$.

ESERCIZIO 2. Si consideri la regione

$$D \doteq \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2+y^2 \le 9,\ y \ge 0,\ y \ge x\Big\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D \frac{y}{x^2+y^2}\, dxdy\,.$$

Si ha:

$\boxed{\text{A}}$ $I = 2$.

$\boxed{\text{B}}$ $I = 2 - \sqrt{2}\pi$.

$\boxed{\text{C}}$ $I = 2 + \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{D}}$ $I = 3 - 2\sqrt{2}$.

ESERCIZIO 3. Si consideri la curva parametrica γ di equazione $x(t) = 3t$, $y(t) = t^3$, $t \in [0, 1]$, e si calcoli l'integrale curvilineo (di prima specie) $I \doteq \int_\gamma \left(\frac{x^3}{9} + y\right) ds$. Si ha:

- [A] $I = 2\sqrt{2} + 1$.
- [B] $I = 4 - 2\sqrt{2}$.
- [C] $I = 12(\sqrt{2} - 1)$.
- [X] $I = 4\sqrt{2} - 2$.

ESERCIZIO 4. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\pi)}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

- [A] Esiste $\alpha \in]0, 1[$ per cui la serie è divergente.
- [B] Esiste $\alpha \in]0, 1[$ per cui la serie è assolutamente convergente.
- [X] Per ogni $\alpha > 0$ la serie è convergente.
- [D] Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Calcolare l'area A della regione delimitata dalla curva parametrica chiusa

$$\vec{r}(t) = \begin{cases} (-t,\ 0) & \text{se} \quad t \in [-\frac{\pi}{4} - 2,\ 0], \\ (\arctan t + 2t,\ 2t(1-t)) & \text{se} \quad t \in [0,\ 1]. \end{cases}$$

- [A] $A = \ln 2 - 2 - \frac{3\pi}{4}$.
- [B] $A = \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}$.
- [X] $A = \frac{4}{3} - \frac{\pi}{2} - \ln 2$.
- [D] $A = \frac{7\pi}{4} - \ln 2 + 1$.

ESERCIZIO 6. Fissato $\alpha \in \mathbb{R}$, sia $t \mapsto \varphi_\alpha(t)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\ddot{y} + y = e^{-t}, \qquad y(0) = 1/2, \qquad \dot{y}(0) = \alpha,$$

e si consideri il limite $\ell(\alpha) \doteq \lim_{t \to +\infty} \varphi_\alpha(t)$. Si ha:

- [A] Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ell(\alpha)$ non esiste.
- [X] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = 0$.
- [C] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- [D] Esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\ell(\alpha) = -\infty$.

ESERCIZIO 7. Si consideri la funzione definita da $f(x, y) = 2x^2y + 2xy^2 - x^2y^2 - 4xy$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

Punti critici: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

Punti di sella: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$.

Punto di minimo relativo: $(1, 1)$.

(iii) Determinare l'immagine di f:

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}.$$

(iv) Determinare l'insieme dei parametri $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste (finito) il seguente limite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^\alpha}.$$

Il limite esiste se e solo se $\alpha < 1$.

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$.

(i) Determinare il dominio naturale di f ed eventuali punti critici liberi di f.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

La funzione non ha punti critici liberi.

(ii) Si consideri l'insieme $A = \big\{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f) \ : \ x^2+y^2 \le 1/2,\ y - 2x^2 \ge 0\big\}$, e se ne descriva la frontiera ∂A .

$$\partial A = B_1 \cup B_2, \qquad B_1 \doteq \big\{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f) \ : \ x^2+y^2 = 1/2, \quad y > 2x^2\big\}\,,$$
$$B_2 \doteq \big\{(x,y) \in \mathrm{Dom}(f) \ : \ y - 2x^2 = 0, \quad |x| \le 1/2\big\}\,.$$

(iii) Determinare eventuali estremi della restrizione di f sull'insieme A, $f\restriction_A\colon A \to \mathbf{R}$, vincolati sulla frontiera ∂A di A, e stabilirne la natura.

Estremi vincolati su B_1 : tutti i punti di B_1 , $f\restriction_{B_1}$ è costante.

Estremi vincolati su B_2 : $(-1/2,\ 1/2)$, $(1/1,\ 1/2)$.

Punti di massimo (assoluto) vincolati su B_2: $(-1/2,\ 1/2)$, $(1/1,\ 1/2)$.

(iv) Determinare l'immagine dell'insieme A tramite f :

$$f(A) = \big]-\infty, \ln\sqrt{1/2}\,\big]\,.$$

(v) Stabilire quali sono i punti (x_0, y_0) regolari dell'insieme di livello di f

$$E_{-1} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x,y) = -1\}\,.$$

(E_{-1} si può rappresentare in un intorno di (x_0, y_0) come grafico cartesiano di una funzione).

Tutti i punti dell'insieme di livello E_{-1} sono regolari.