V APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA LB

Ing. Informatica (G-Z)

(DOCENTE: FABIO ANCONA)

A.A. 2003/2004, 3 settembre 2004

c53171

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6
B	C	D	C	A	B

N.B. *Per ogni esercizio della prima parte indicare nella corrispondente casella numerata (della tabella riassuntiva in alto) la lettera della risposta scelta. Ogni risposta corretta vale 4 punti, ogni risposta sbagliata vale -1/2, ogni risposta non data vale 0 punti. Gli esercizi n. 7-8 valgono 8 punti.*

ESERCIZIO 1. Data una funzione $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da $f(x, y) = \varphi(x + \alpha y)$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

A $\quad f_{xx}(x, y) + \alpha f_{yy}(x, y) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

~~B~~ $\quad f_{xx}(x, y) - \frac{1}{\alpha^2} f_{yy}(x, y) = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

C $\quad$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f_{xx}(x_0, y_0) - \alpha f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$.

D $\quad$ Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, esiste $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tale che $f_{xx}(x_0, y_0) + \alpha f_{yy}(x_0, y_0) \neq 0$.

ESERCIZIO 2. Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{2}{3}} \left| \sin \frac{1}{n} - \frac{1}{n^\alpha} \right|, \quad \alpha > 0,$$

e stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta (si suggerisce di utilizzare lo sviluppo asintotico $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$, per $x \to 0$).

A $\quad$ La serie è convergente per ogni $\alpha \in \left] \frac{1}{3}, 1 \right]$.

B $\quad$ La serie è convergente per ogni $\alpha \geq 1$.

~~C~~ $\quad$ Esiste un solo valore $\alpha > 0$ per cui la serie è convergente.

D $\quad$ Per ogni $\alpha > 0$ la serie non é convergente.

ESERCIZIO 3. Si consideri la funzione $f(x, y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Stabilire quale delle affermazioni seguenti è corretta.

$\boxed{\text{A}}$ f è costante sul suo dominio naturale.

$\boxed{\text{B}}$ L'immagine di f è un insieme illimitato.

$\boxed{\text{C}}$ L'immagine di f è un intervallo.

$\boxed{\times}$ $\nabla f(x, y) = 0$ per ogni (x, y) nel dominio naturale di f.

ESERCIZIO 4. Si consideri la regione

$$D \doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ y^2 \leq x \leq 1, \quad y \geq 0\},$$

e si calcoli l'integrale

$$I \doteq \iint_D \frac{y}{x + y^2}\, dxdy\,.$$

Si ha.

$\boxed{\text{A}}$ $I = -1\,.$

$\boxed{\text{B}}$ $I = 3 \ln 2\,.$

$\boxed{\times}$ $I = \frac{\ln 2}{2}\,.$

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 5. Sia $x \mapsto \varphi(x)$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y\,(y - 1)\,, \\ y(0) = \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Stabilire quale delle seguenti affermazioni è corretta.

$\boxed{\times}$ $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 1\,.$

$\boxed{\text{B}}$ φ ammette uno zero.

$\boxed{\text{C}}$ φ è una funzione illimitata.

$\boxed{\text{D}}$ φ non è definita su tutto $\mathbb{R}$.

ESERCIZIO 6. Determinare per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$ è convergente l'integrale generalizzato

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt{x})}{(\sin x)^\alpha}\, dx$$

(si ricordi lo sviluppo asintotico $\ln(1 + y) = y + o(y)$, per $y \to 0$).

$\boxed{\text{A}}$ Per ogni $\alpha > 1\,.$

$\boxed{\times}$ Per ogni $\alpha < \frac{3}{2}\,.$

$\boxed{\text{C}}$ Per ogni $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 2\right[\,.$

$\boxed{\text{D}}$ Nessuna delle altre risposte è corretta.

ESERCIZIO 7. Si consideri la curva parametrica $\vec{r}:[0,\,\pi]\to\mathbb{R}^2$ definita da

$$\vec{r}(t)=\big(\sin t\cos^2 t,\ \sin^2 t\cos t\big),\qquad t\in[0,\,\pi]\,.$$

(i) Determinare eventuali punti di intersezione di $\vec{r}$ con gli assi cartesiani, stabilire se è una curva chiusa, e tracciare la traiettoria probabile della curva.

$\vec{r}$ è una curva chiusa.

Intersezioni con gli assi cartesiani:

asse x : $\quad x=0\,.$

asse y : $\quad y=0\,.$

(ii) Determinare i punti regolari della curva $\vec{r}$.

Tutti i punti sono regolari.

(iii) Scrivere l'equazione della retta tangente a $\vec{r}$ nel punto $\vec{r}\big(\pi/2\big)$.

La retta tangente a $\vec{r}$ in $\vec{r}\big(\pi/2\big)=(0,0)$ è $x=0$.

(iv) Calcolare l'integrale curvilineo (di prima specie) $I\doteq\displaystyle\int_{\vec{r}}\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,ds\,.$

$I=0\,.$

ESERCIZIO 8. Si consideri la funzione definita da $f(x,y) = e^y \sin^2 x$.

(i) Determinare eventuali punti critici di f.

$$\text{Punti critici:} \quad \{(k\pi,\, y) \ : \ k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

(ii) Determinare la natura dei punti critici di f.

$$\text{Punti di minimo assoluto:} \quad \{(k\pi,\, y)\ ;\ k \in \mathbb{Z},\ y \in \mathbb{R}\}.$$

(iii) Determinare l'immagine della restrizione di f al rettangolo

$$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -\pi \le x \le \pi\,, \quad -1 \le y \le 1\}.$$

$$f(R) = [0,\, e]\,.$$

(iv) Determinare l'immagine di f.

$$\mathrm{Im}(f) = [0,\, +\infty[\,.$$