

Leggi di conservazione (*)

ALBERTO BRESSAN

1. – Un modello di traffico stradale.

Per introdurre l'argomento, può essere utile iniziare con un esempio. Supponiamo di voler descrivere l'evoluzione del traffico su un'autostrada. Possiamo indicare la **densità di traffico** mediante la variabile

$$\varrho = [\text{numero di auto per chilometro di strada}]$$

e cercare di capire come questa densità può variare, in funzione del tempo t e del punto x sull'autostrada. Fissiamo due punti qualsiasi $a < b$. Ad un istante t , la quantità totale di auto nel tratto $[a, b]$ è espressa dall'integrale

$$\int_a^b \varrho(t, x) dx.$$

Questa quantità può variare nel tempo, ma non perché alcune auto vengono create dal nulla, oppure distrutte. La variazione è solo dovuta al fatto che le auto si spostano (fig. 1): alcune entrano da a mentre altre escono da b . Pertanto

$$(1.1) \quad \frac{d}{dt} \int_a^b \varrho(t, x) dx = f(t, a) - f(t, b),$$

dove $f(t, a)$ indica il flusso di auto entrante in a , mentre $f(t, b)$ è il flusso di auto uscente da b , all'istante t . In un caso concreto, tale flusso si può misurare ad esempio contando il numero di macchine che transitano sotto un cavalcavia, nell'unità di tempo.

(*) Preparato in occasione della conferenza tenuta dall'A. all'Assemblea UMI del 17 maggio 2003, a Bologna.

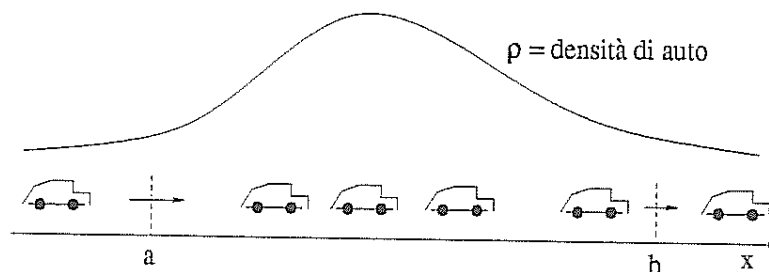


Figura 1

Usando il teorema fondamentale del calcolo, la (1.1) si riscrive nella forma

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) dx = - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) dx.$$

Osservando che l'integrale

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \varrho(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(t, x) \right\} dx$$

si annulla ad ogni istante t e per qualunque scelta dell'intervallo $[a, b]$, concludiamo che la funzione integranda deve essere identicamente nulla. Otteniamo quindi la **legge di conservazione**

$$(1.2) \quad \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\partial}{\partial x} f = 0.$$

La (1.2) esprime il fatto che la densità di auto ϱ è una **quantità conservata** (il numero totale di auto è costante nel tempo), mentre f è il corrispondente **flusso**.

Conoscendo la densità iniziale, vorremmo calcolare la funzione ϱ in tempi futuri. Ciò è possibile se riusciamo ad esprimere il flusso f come funzione della sola variabile ϱ . A tale scopo, osserviamo che

$$f = \varrho \times v$$

$$[\text{flusso}] = [\text{densità}] \times [\text{velocità}].$$

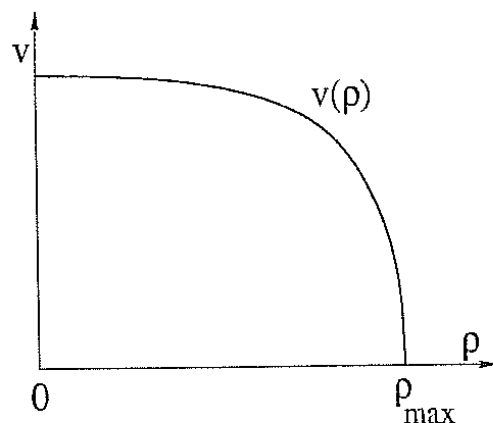


Figura 2

Facciamo ora l'ipotesi semplificatrice che la velocità v con cui viaggiano le auto dipenda solo dalla densità del traffico. Una funzione $v = v(\rho)$ che descriva questa dipendenza con sufficiente approssimazione si può ottenere per via sperimentale. Ovviamente si tratterà di una funzione decrescente (fig. 2). Se la densità ρ del traffico è piccola, le auto viaggiano più velocemente. Quando la densità raggiunge una soglia critica $\rho_{\max}$, le auto si trovano incolonnate con un paraurti attaccato al successivo, e nessuna può muoversi: in questo caso $v=0$. La corrispondente funzione di flusso $f(\rho) = \rho v(\rho)$ è illustrata nella fig. 3. Inserendo questa dipendenza $f=f(\rho)$ nell'espressione (1.2) e

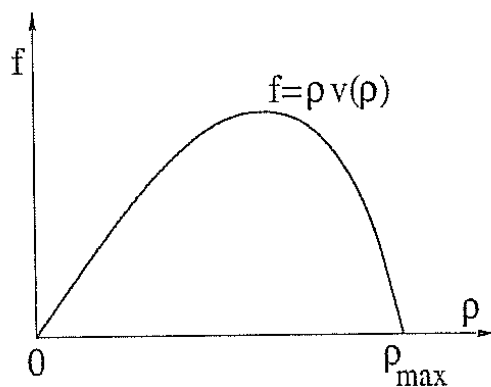


Figura 3

usando la notazione abbreviata $\varrho_t = \partial\varrho/\partial t$, $f_x = \partial f/\partial x$ per indicare le derivate parziali, otteniamo finalmente la forma standard di una legge di conservazione:

$$(1.3) \quad \varrho_t + f(\varrho)_x = 0.$$

Conoscendo la funzione densità ϱ ad un istante iniziale t_0 , risolvendo la (1.3) si ottengono i valori di $\varrho = \varrho(t, x)$ per ogni successivo istante $t > t_0$. Questa equazione può quindi essere utile per comprendere l'evoluzione di un'onda di traffico, o per fare previsioni, entro i limiti delle approssimazioni imposte dal modello matematico.

2. - La dinamica dei gas.

Equazioni matematiche in forma di leggi di conservazione sono state introdotte molto prima dell'invenzione dell'auto e dei problemi di traffico stradale. Un primo esempio molto significativo si può far risalire ad Eulero (1755), che nella memoria [4] ha ricavato un sistema di equazioni per la dinamica dei gas. Il comportamento di un gas può essere descritto mediante le variabili

$$\begin{aligned} \varrho &= \text{densità} & p &= \text{pressione} \\ v &= \text{velocità} & E &= \text{energia per unità di massa.} \end{aligned}$$

Per semplicità, supporremo qui che queste quantità siano funzioni del tempo t e di una sola variabile spaziale x : si pensi ad un gas contenuto in un tubo lungo e sottile. Trascurando piccoli effetti dovuti alla viscosità, l'evoluzione nel tempo di queste grandezze macroscopiche è determinata da un sistema di tre leggi di conservazione:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\varrho + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v) = 0 & (\text{conservazione della massa}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho v) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v^2 + p) = 0 & (\text{conservazione della quantità di moto}) \\ \frac{\partial}{\partial t}(\varrho E) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho E v + p v) = 0 & (\text{conservazione dell'energia}). \end{cases}$$

Trattandosi di tre equazioni in quattro variabili, il sistema (2.1) deve

essere chiuso mediante una relazione aggiuntiva del tipo

$$(2.2) \quad p = p(\varrho, E)$$

che determini la pressione come funzione delle altre variabili. Osserviamo che l'energia ϱE si può scindere come somma di un'energia cinetica $\varrho v^2/2$ e di una energia interna, dipendente dalla temperatura θ . La (2.2) si può quindi ricavare da un'equazione del tipo

$$(2.3) \quad p = p(\varrho, \theta),$$

dove il valore della pressione viene assegnato in funzione della densità e della temperatura del gas. La funzione p nella (2.3) dipende ovviamente dal particolare gas considerato. Essa può essere determinata sperimentalmente, oppure ricavata per via teorica da altri modelli matematici, per esempio studiando l'equazione cinetica di Boltzmann.

Scrivere le equazioni che regolano la dinamica di un gas è solo il primo passo in una trattazione matematica del problema. In tappe successive si cercherà di analizzare le soluzioni, dimostrandone se possibile l'esistenza e l'unicità, studiando le loro proprietà qualitative e infine sviluppando algoritmi efficienti per il loro calcolo numerico. Formule esplicite per le soluzioni, anche se valide solo per casi particolari, sono pure di grande interesse.

Dopo il contributo fondamentale di Eulero, il primo importante studio delle equazioni della gas-dinamica è dovuto a B. Riemann, oltre un secolo dopo. Al giorno d'oggi, Riemann è soprattutto noto per la sua teoria dell'integrale, che costituisce tuttora il fondamento di molti corsi universitari. In geometria, la teoria delle «varietà Riemanniane» ha fornito ad Einstein (60 anni più tardi) il linguaggio per descrivere lo spazio curvo della relatività generale. In teoria dei numeri, il suo lavoro, culminato in una congettura sulla distribuzione dei numeri primi – un enigma tuttora irrisolto – rappresenta uno dei capitoli più profondi dell'intera matematica. Comunque, nel 1860 Riemann trovò anche il tempo di scrivere la monografia [11] sulla dinamica dei gas; forse meno nota, ma anch'essa fondamentale nello sviluppo di quest'area di ricerca.

L'esperimento concettuale considerato da Riemann è il seguente

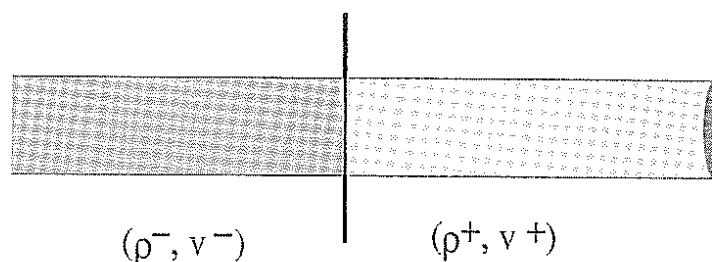


Figura 4

(fig. 4). Supponiamo di avere un tubo diviso a metà da un diaframma. All'istante iniziale, nella metà sinistra mettiamo un gas con densità costante ρ^- e velocità v^- . A destra del diaframma, il gas avrà invece una diversa densità ρ^+ e velocità v^+ . Immaginiamo ora di rimuovere improvvisamente il diaframma. Come si comporterà il gas? Intuitivamente, ci aspettiamo che la parte con densità (e quindi con pressione) più alta inizi a spingere l'altra metà. Un'onda di pressione inizierà quindi a propagarsi lungo il tubo. Questo fenomeno è stato studiato da Riemann per via puramente teorica, risolvendo un sistema di equazioni. Un'utile semplificazione del sistema (2.1) si ottiene supponendo che il gas si comporti in modo **adiabatico**, senza scambi di calore fra le sue varie porzioni. Questa ipotesi è ragionevole, poichè la propagazione del calore per diffusione è solitamente assai più lenta della propagazione delle onde di pressione. Dalla (2.1) otteniamo quindi un modello semplificato, costituito da due sole equazioni:

$$(2.4) \quad \begin{cases} \rho_t + (\rho v)_x = 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p(\rho))_x = 0. \end{cases}$$

Si tratta del cosiddetto «p-sistema». Esso risulta interamente specificato una volta assegnata la pressione $p = p(\rho)$ in funzione della sola densità. Per questo sistema si cerca una soluzione

$$\rho = \rho(t, x), \quad v = v(t, x)$$

che al tempo $t = 0$ soddisfi le condizioni iniziali

$$(2.5) \quad \varrho(0, x) = \begin{cases} \varrho^- & \text{se } x < 0, \\ \varrho^+ & \text{se } x > 0, \end{cases} \quad v(0, x) = \begin{cases} v^- & \text{se } x < 0, \\ v^+ & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

La soluzione trovata da Riemann si spezza in quattro casi distinti, a seconda dei valori dei dati iniziali ϱ^- , ϱ^+ , e v^- , v^+ . Uno di questi è illustrato nella fig. 5. Il piano t - x viene suddiviso in tre settori distinti, dove le funzioni ϱ , v assumono valori costanti: ϱ^- , v^- a sinistra, ϱ^+ , v^+ a destra, e degli opportuni valori ϱ^* , v^* in un settore intermedio. Nelle caso qui illustrato, i primi due settori sono separati da un'onda di shock, lungo il quale entrambe le funzioni ϱ , v sono discontinue, saltando dallo stato (ϱ^-, v^-) a (ϱ^*, v^*) . Fra il secondo e terzo settore la soluzione contiene invece un'onda di rarefazione. In questo caso la transizione dallo stato (ϱ^*, v^*) allo stato (ϱ^+, v^+) avviene con continuità. È importante osservare che la soluzione è sempre «autosimile», i.e. costante lungo tutti le semirette per l'origine, nel piano t - x .

Dopo Riemann, contributi importanti alla teoria delle onde di shock sono dovuti a W. Rankine (1870) e H. Hugoniot (1889). Ma è solo dal 1940 in poi, con la costruzione dei primi aeroplani a reazione, che questa teoria matematica ha trovato le prime vere applicazioni. Da allora, l'analisi delle equazioni della gas-dinamica ha ricevuto grande impulso e si è sviluppata con continuità nel tempo. Fra i primi matematici ad occuparsene va certamente citato J. von Neu-

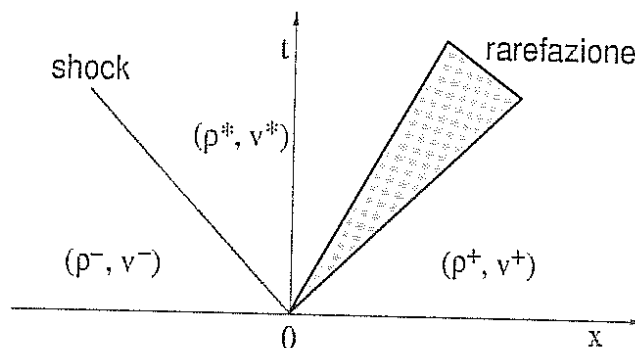


Figura 5

mann, che dedicò all'argomento una serie di lavori [9]. Dopo aver studiato numerose soluzioni particolari, contenenti anche onde di shock in più dimensioni spaziali, egli però si convinse che il moto dei fluidi era un fenomeno troppo complesso per una descrizione puramente analitica. La via più promettente, secondo von Neumann, sarebbe stata la risoluzione numerica delle equazioni del moto, utilizzando potenti macchine elettroniche. Questa convinzione gli procurò lo stimolo per realizzare una delle opere che gli hanno dato maggiore fama: la progettazione dei primi computers.

A von Neumann si deve anche l'introduzione delle prime tecniche numeriche per calcolare approssimativamente le soluzioni. Qui un'idea di base sta nell'approssimare le derivate parziali con delle differenze finite. Il calcolo approssimato di una soluzione viene così ricondotto ad un grandissimo numero di operazioni elementari: somme, moltiplicazioni, divisioni, e calcolo della funzione flusso.

Per fare un esempio, consideriamo la legge di conservazione (1.3), e assegnamo un dato iniziale all'istante $t = 0$

$$(2.6) \quad q(0, x) = \bar{q}(x).$$

Per calcolare una soluzione approssimata, iniziamo col costruire una griglia di punti nel piano t - x , di passo Δx , Δt . Chiamiamo

$$P_{ij} = (i\Delta t, j\Delta x)$$

il generico punto della griglia (fig. 6). Se la funzione q soddisfa la legge di conservazione (1.3) ed è sufficientemente regolare, possiamo scrivere

$$\frac{\partial q}{\partial t}(P_{i,j}) = - \frac{\partial f}{\partial x}(P_{i,j}) \approx - \frac{f(q(P_{i,j+1})) - f(q(P_{i,j-1})))}{2\Delta x}.$$

Usando l'ulteriore approssimazione

$$q(P_{i+1,j}) \approx q(P_{i,j}) + \Delta t \cdot \frac{\partial q}{\partial t}(P_{i,j})$$

arriviamo quindi alla formula

$$(2.7) \quad q(P_{i+1,j}) \approx q(P_{i,j}) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(q(P_{i,j+1})) - f(q(P_{i,j-1}))].$$

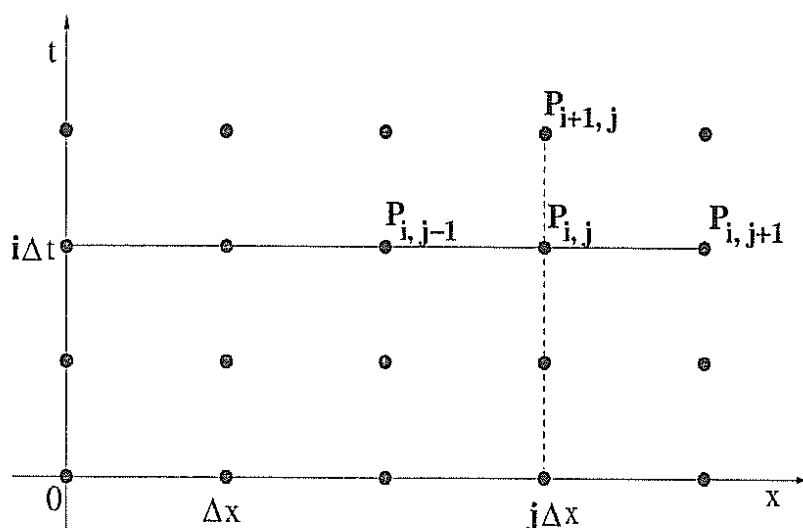


Figura 6

Si osservi che, conoscendo la funzione q nei tre punti consecutivi $P_{i,j-1}$, $P_{i,j}$, $P_{i,j+1}$, la (2.7) permette di calcolare un valore approssimato della stessa funzione nel punto $P_{i+1,j}$. Ciò suggerisce un semplice algoritmo numerico. Posto $q_{i,j} = q(P_{i,j})$, consideriamo l'insieme di equazioni algebriche

$$(2.8) \quad q_{i,j+1} = q_{i,j} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} [f(q_{i,j+1}) - f(q_{i,j-1})]$$

con dati iniziali

$$(2.9) \quad q_{0,j} = \bar{q}(j\Delta x) \quad j \in \mathbb{Z}.$$

A partire dai valori $q_{0,j}$, mediante la (2.8) possiamo quindi calcolare le $q_{1,j}$ per ogni intero j . Usando di nuovo le (2.8) otteniamo successivamente le $q_{2,j}$, poi le $q_{3,j}$, etc... Quello qui descritto è uno dei più elementari algoritmi numerici, per la risoluzione di leggi di conservazione. Si noti che la (2.8) non richiede il calcolo di alcuna derivata parziale: è sufficiente calcolare due valori della funzione flusso, e un paio di differenze. Un'analisi più approfondita dell'equazione (1.3) permette di individuare condizioni che garantiscono la convergenza

delle approssimazioni $q_{i,j}$ ai valori $q(P_{ij})$ della soluzione esatta, allorché i parametri della griglia $\Delta t, \Delta x$ tendono a zero.

Con l'avvento dei computers, gli algoritmi numerici hanno avuto un enorme sviluppo, raggiungendo un grado di complessità ed accuratezza un tempo inimmaginabili, e trovando numerosissime applicazioni. Lo stesso von Neumann fu il primo ad utilizzare metodi alle differenze finite per effettuare previsioni metereologiche. Al giorno d'oggi, non solo le previsioni del tempo sono basate sui dati elaborati dal computer, ma la risoluzione numerica di equazioni della fluidodinamica interviene spesso nella progettazione di automobili, navi ed aerei. Il comportamento di un'imbarcazione che gareggerà nella Coppa America può essere ora simulato al computer ancor prima di costruire effettivamente la barca. Ciò richiede la risoluzione delle equazioni matematiche che descrivono il flusso (estremamente complesso) dell'acqua vicino allo scafo e dell'aria attorno alle vele.

3. - Onde di shock.

Prendendo spunto dalle equazioni (2.1), in letteratura è oramai consuetudine studiare sistemi di leggi di conservazione nella forma più generale

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \frac{\partial}{\partial x} f_1(u_1, \dots, u_n) = 0, \\ \dots \\ \frac{\partial}{\partial t} u_n + \frac{\partial}{\partial x} f_n(u_1, \dots, u_n) = 0. \end{cases}$$

Per semplicità, scriveremo questo sistema come

$$(3.1) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

ricordando però che $u = (u_1, \dots, u_n)$ è un vettore in $\mathbb{R}^n$ e che $f = (f_1, \dots, f_n)$ è una mappa da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^n$. Per soluzioni regolari, la (3.1) è equivalente al sistema quasilineare

$$(3.2) \quad u_t + A(u) u_x = 0,$$

ove $A(u) = Df(u)$ è la matrice Jacobiana delle derivate parziali pri-

me di f . Il sistema si dice **strettamente iperbolico** se ciascuna matrice Jacobiana $A(u)$, con $A_{ij} = \partial f_i / \partial u_j$, ha autovalori reali e distinti. In tale ipotesi, fra problemi «naturalmente» che da tempo si pongono i matematici, c'è quello di dimostrare l'esistenza di soluzioni, studiane poi le proprietà qualitative e la dipendenza dai dati iniziali.

Per le equazioni della fisica matematica che descrivono ad esempio la propagazione del calore, le onde acustiche, gli stati di equilibrio di membrane elastiche o il moto di un fluido viscoso incompressibile, problemi di questo tipo sono stati affrontati e in buona parte risolti già da molto tempo. Può quindi apparire sorprendente che, nel caso delle equazioni di Eulero della gas dinamica, un primo teorema di esistenza globale nel tempo si sia fatto attendere fino al 1965, con il lavoro di Glimm [5]. In parte, questo ritardo si può semplicemente attribuire al fatto che i grandi matematici del passato si sono occupati di altri problemi. Ma vanno anche sottolineate delle difficoltà oggettive che si incontrano nello studio di queste equazioni, fortemente non lineari. Esse sono dovute essenzialmente alla perdita di regolarità delle soluzioni.

Per spiegare meglio la questione, consideriamo una legge di conservazione scalare della forma (3.1), e cerchiamo una soluzione che all'istante $t = 0$ assuma il dato iniziale

$$(3.3) \quad u(0, x) = \varphi(x)$$

per una funzione assegnata φ . Supponendo che la $u = u(t, x)$ sia regolare, usando il teorema di differenziazione della funzione composta possiamo riscrivere la (3.1) come

$$u_t + f'(u) u_x = 0.$$

Nel caso speciale in cui la funzione f è lineare, ossia $f(u) = \lambda u$ per qualche costante λ , allora il nostro problema si riduce a

$$u_t + \lambda u_x = 0 \quad u(0, x) = \varphi(x).$$

È ora facile indovinare la soluzione esplicita:

$$u(t, x) = \varphi(x - \lambda t).$$

Essa consiste in un'onda viaggiante. Come illustrato nella parte superiore della fig. 7, il profilo della soluzione $u(t, \cdot)$ non si deforma nel tempo: esso semplicemente trasla con velocità costante λ .

Nel caso nonlineare, invece, la velocità di propagazione f' sarà una funzione della u . Ad esempio, se la f è una funzione convessa, allora la sua derivata f' è una funzione monotona crescente. Ciò determina una diversa velocità di propagazione dell'onda, a seconda dell'altezza. Dato un profilo iniziale (3.3), la soluzione può essere costruita come segue. Pensiamo di immergere il grafico della φ in un fluido, le cui particelle si muovono orizzontalmente con velocità pari a $f'(u)$. Quelle stesse particelle che all'istante $t = 0$ descrivono il grafico di $\varphi = u(0, \cdot)$, al generico tempo $t > 0$ descriveranno il grafico della soluzione $u(t, \cdot)$.

Dalla fig. 7 si vede come, se la velocità di propagazione non è costante, il profilo dell'onda si deforma nel tempo. In generale, ad tempo finito T ci saranno punti in cui il grafico diventa verticale (i.e. assume pendenza infinita). In tal caso, la soluzione perde di regolarità: per tempi successivi $t > T$, essa non è più differenziabile, e neppure continua.

Se vogliamo costruire soluzioni definite globalmente nel tempo, è

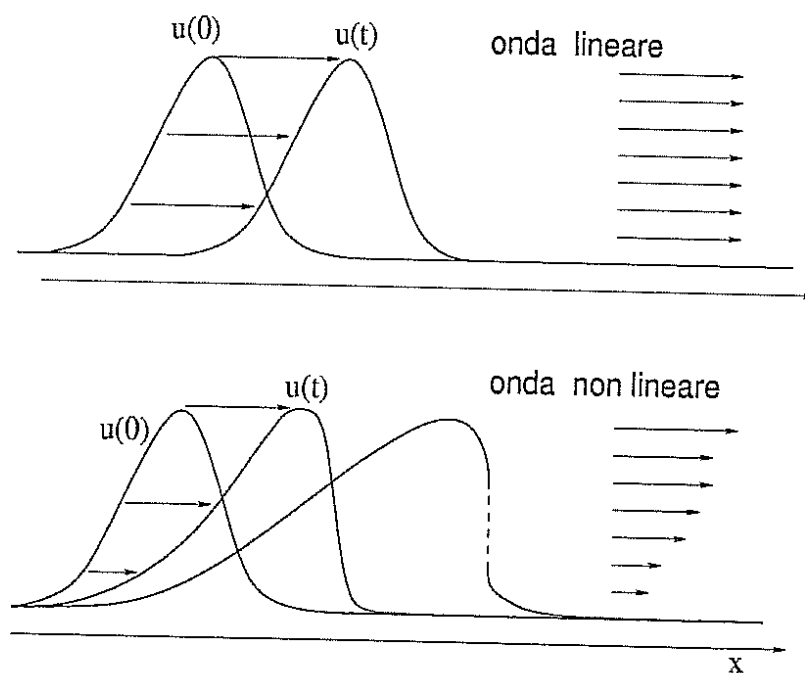


Figura 7

quindi necessario lavorare in uno spazio di funzioni discontinue. Per esempio, possiamo cercare di costruire le nostre soluzioni nello spazio BV delle funzioni a **variazione limitata**. Ricordo qui che la variazione totale di una funzione $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ è definita da

$$\text{Var. Tot. } \{u\} = \sup_{x_0 < x_1 < \dots < x_m} \sum_{i=1}^m |u(x_{i-1}) - u(x_i)|.$$

L'estremo superiore è qui calcolato su tutte le successioni crescenti di punti reali, con qualunque $m \geq 1$.

Trattandosi di soluzioni discontinue, quindi non differenziabili, lo stesso sistema di equazioni alle derivate parziali (3.1) deve essere reinterpretato. A tal fine osserviamo che, se $u = u(t, x)$ è una soluzione regolare, allora si ha certamente

$$\iint \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(t, x) + \frac{\partial}{\partial x} f(u(t, x)) \right\} \phi(t, x) dx dt = 0$$

per qualsiasi funzione ϕ . Scegliamo ora come ϕ una funzione in C_c^1 , ossia continuamente differenziabile, nulla al di fuori di un insieme limitato. Integrando per parti, otteniamo

$$- \iint \left\{ u(t, x) \frac{\partial}{\partial t} \phi(t, x) + f(u(t, x)) \frac{\partial}{\partial x} \phi(t, x) \right\} dx dt = 0$$

Quest'ultima relazione ha significato anche nel caso in cui la funzione u sia discontinua. Seguendo la teoria delle distribuzioni, definiamo quindi come **soluzione debole** della legge di conservazione (3.1) una funzione $u = u(t, x)$ tale che

$$(3.4) \quad \iint \left\{ u \frac{\partial}{\partial t} \phi + f(u) \frac{\partial}{\partial x} \phi \right\} dx dt = 0$$

per ogni funzione $\phi \in C_c^1$.

La più semplice soluzione discontinua dell'equazione (3.1) ha la forma

$$(3.5) \quad U(t, x) = \begin{cases} u^+ & \text{if } x > \lambda t, \\ u^- & \text{if } x < \lambda t. \end{cases}$$

Essa viene chiamata **onda di shock**. Usando il teorema della divergenza, si dimostra che la (3.5) è soluzione debole se e solo se gli stati u^- , u^+ adiacenti alla discontinuità e la velocità λ soddisfano le famose **equazioni di Rankine-Hugoniot**

$$(3.6) \quad \lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-).$$

In presenza di shocks, è ben noto che in generale le soluzioni deboli non sono uniche: ci possono essere infinite soluzioni della (3.4), tutte con lo stesso valore iniziale (3.3). Per recuperare un teorema di unicità, è quindi necessario imporre qualche ulteriore ipotesi sulle soluzioni ammissibili. Nel caso della gas-dinamica, una restrizione agli shocks fisicamente possibili è fornita dal secondo principio della termodinamica, secondo cui l'entropia fisica è una quantità crescente nel tempo.

Un opportuno concetto di entropia può essere definito, più in generale, per un'ampia classe di sistemi iperbolici. Una funzione $\eta: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ viene chiamata **entropia** per il sistema di leggi di conservazione (3.1), con **flusso di entropia** $q: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, se le derivate soddisfano l'identità

$$(3.7) \quad D\eta(u) \cdot Df(u) = Dq(u)$$

in ogni punto $u \in \mathbb{R}^n$. Una conseguenza immediata della (3.7) è che, se $u = u(t, x)$ è una soluzione regolare del sistema (3.1), allora

$$(3.8) \quad \eta(u)_t + q(u)_x =$$

$$D\eta(u) u_t + Dq(u) u_x = D\eta(u)[-Df(u) u_x] + Dq(u) u_x = 0.$$

Per soluzioni regolari della (3.1), non solo le componenti $u_1, \dots, u_n$ sono conservate, ma vale quindi l'ulteriore legge di conservazione (3.8). Va osservato però che in generale la quantità η non sarà conservata nel caso di soluzioni discontinue. Una condizione di ammissibilità sulle soluzioni deboli è la seguente.

Diciamo che uno shock del tipo (3.5) è **entropico** se, per ogni entropia convessa η , con flusso q , vale la disuguaglianza

$$(3.9) \quad \lambda[\eta(u^+) - \eta(u^-)] \geq q(u^+) - q(u^-).$$

La (3.9) pone ulteriori restrizioni su tutti gli shocks presenti in una soluzione debole del sistema (3.1). Recentemente si è dimostrato che tale condizione effettivamente seleziona un'unica soluzione ammissibile.

4. – Il problema di Cauchy.

Come si è detto, la forte non-linearità delle equazioni, assieme alla mancanza di regolarità delle soluzioni, rende particolarmente difficile lo studio delle leggi di conservazione. In questo contesto, molte delle tecniche astratte dell'analisi funzionale non possono essere applicate. Ad esempio, la soluzione non si può rappresentare come punto fisso di una trasformazione continua, oppure in forma variazionale come punto critico (minimo, massimo locale, punto di sella...) di un opportuno funzionale. Per questo motivi, la teoria è fino ad ora progredita sviluppando metodi *ad hoc*.

Nella costruzione delle soluzioni, il punto di partenza è il cosiddetto *problema di Riemann*, avente la forma

$$(4.1) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \begin{cases} u^+ & \text{se } x > 0, \\ u^- & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si osservi che in questo caso il dato iniziale è costante a tratti, con un unico salto nell'origine. Tale problema è stato dapprima studiato da Riemann [11] nel contesto della gas dinamica iso-entropica. Per un'ampia classe di sistemi $n \times n$ di leggi di conservazione, la soluzione del problema di Riemann è stata costruita da P. Lax [7]. Essa ha la forma $u(t, x) = U(x/t)$, essendo costante lungo ciascuna semiretta uscente dall'origine. Tale soluzione contiene $n + 1$ valori costanti $u^- = \omega_0, \omega_1, \dots, \omega_{n-1}, \omega_n = u^+$. Due stati adiacenti ω_{i-1}, ω_i sono connessi o da un semplice salto, i.e. da uno shock soddisfacente le equazioni di Rankine-Hugoniot (3.6), oppure da un'onda centrata di rarefazione. In questo caso c'è un settore in cui i valori della u variano con continuità da ω_{i-1} a ω_i . La fig. 8 illustra un esempio di soluzione del problema di Riemann per un sistema di 3 leggi di conservazione. Gli stati ω_0, ω_1 sono connessi da un'onda di rarefazione. Gli

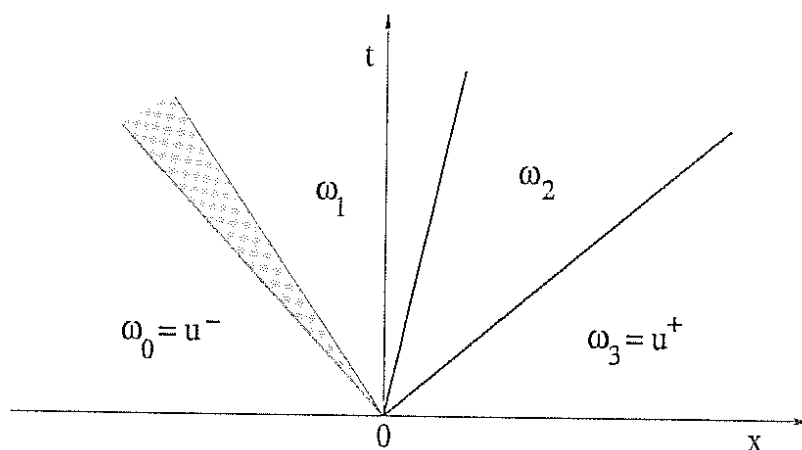


Figura 8

stati ω_1 e ω_2 , come gli stati ω_2 e ω_3 , sono connessi da onde di shock.

Più in generale, dato il problema di Cauchy

$$(4.2) \quad u_t + f(u)_x = 0, \quad u(0, x) = \varphi(x),$$

una soluzione approssimata può ora essere costruita incollando assieme varie soluzioni di problemi di Riemann. Nell'algoritmo di Glimm [5] si costruisce una soluzione approssimata utilizzando una griglia nel piano t - x di passo Δt , Δx , con nodi nei punti

$$P_{jk} = (t_j, x_k) \doteq (j\Delta t, k\Delta x) \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Al tempo $t = 0$ l'algoritmo inizia prendendo un'approssimazione costante a tratti del dato iniziale φ , costante lungo ciascun intervallo del tipo $[x_{k-1}, x_k[$. Per tempi $t > 0$ piccoli, la soluzione viene ottenuta risolvendo i singoli problemi di Riemann corrispondenti ai salti della funzione $u(0, \cdot)$, nei punti x_k . Se il rapporto $\Delta t/\Delta x$ è sufficientemente piccolo, possiamo supporre che le onde provenienti da diversi problemi di Riemann rimangano ben separate fino all'istante $t_1 = \Delta t$. La soluzione può quindi essere prolungata su tutto l'intervallo temporale $[0, \Delta t[$. Per tempi superiori, onde diverse inizierebbero ad interagire, e la soluzione diventerebbe molto complicata. Per evitare ciò, si ricorre ad una procedura di restarting. All'istante $t_1 = \Delta t$ la

$u(t_1, \cdot)$ viene approssimata mediante una nuova funzione costante a tratti, con salti nei nodi $x_k = k\Delta x$. La soluzione si può ora costruire sul nuovo intervallo temporale $[\Delta t, 2\Delta t[$ incollando assieme le varie soluzioni dei problemi di Riemann determinati dai salti nei punti x_k . All'istante $t_2 = 2\Delta t$, la soluzione così ottenuta viene nuovamente approssimata da una funzione costante a tratti, etc...

Un aspetto chiave della costruzione è la tecnica di restarting. Volendo approssimare una generica funzione u mediante una funzione costante a tratti con salti nei punti $x_k = k\Delta x$, sembra naturale sostituire la u con il suo valor medio preso su ciascun intervallo $[x_{k-1}, x_k]$. Questo procedimento dà luogo al metodo numerico di approssimazione di Godunov. Purtroppo, la convergenza di tali approssimazioni si è rivelata estremamente difficile da studiare, ed è tuttora un problema aperto. Nell'algoritmo di Glimm, il restarting è invece basato su una tecnica di campionamento. Al tempo t_j , su ciascun intervallo, $[x_{k-1}, x_k]$, si sceglie un punto «a caso» y_k . Il vecchio valore della funzione $u(t_j, \cdot)$ nel punto y_k diventa il nuovo valore della funzione u su tutto l'intervallo. Una soluzione approssimata costruita da questo algoritmo è illustrata nella figura 9. Gli asterischi indicano i punti ove la funzione viene campionata. L'analisi di Glimm ha mostrato che

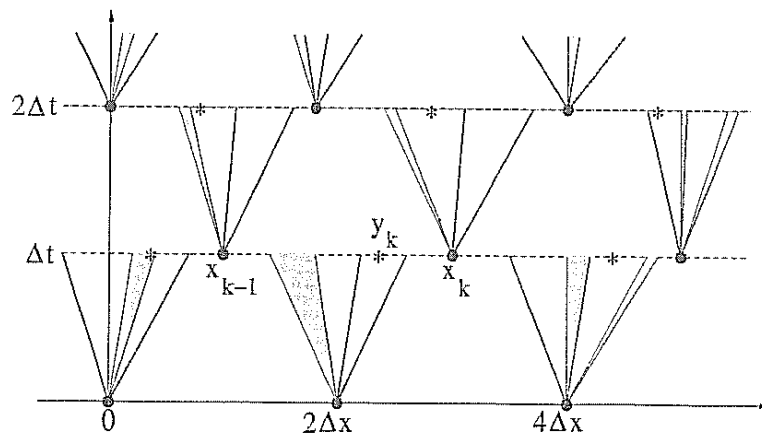


Figura 9

1. Se la condizione iniziale $\bar{u}$ ha variazione totale piccola, per ogni $t > 0$ la variazione totale della soluzione approssimata $u(t, \cdot)$ rimane piccola.
2. Facendo tendere a zero il passo della griglia $\Delta t, \Delta x$ si ottiene una successione di soluzioni approssimate. Per il teorema di compattezza di Helly, è possibile estrarre una sottosuccessione convergente ad una funzione limite $u = u(t, x)$, in L^1_{loc} .
3. Se i punti aleatori y_k in cui viene effettuato il campionamento sono distribuiti con probabilità uniforme, allora con probabilità uno la funzione limite u è una soluzione debole.

In conclusione, per il problema di Cauchy (4.2) una soluzione debole $u = u(t, x)$ certamente esiste, definita per tutti i tempi $t \in [0, \infty[$. Un aspetto di straordinaria novità in questo lavoro di Glimm è l'uso della teoria della probabilità, nella dimostrazione di un teorema di esistenza per un problema di natura puramente deterministica. Un'eccellente esposizione dello schema di Glimm si può trovare nella monografia introduttiva di Smoller [13].

Un metodo alternativo per costruire soluzioni approssimate, che evita qualunque argomento probabilistico, è la cosiddetta tecnica di **wave-front tracking** (fig. 10). Si inizia con un'approssimazione co-

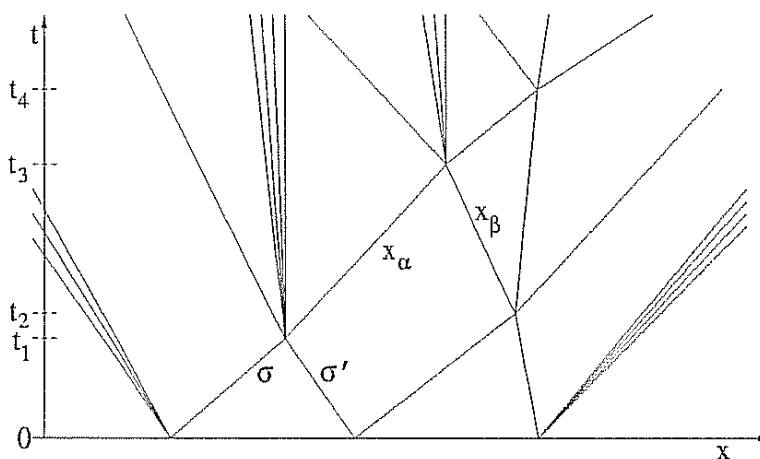


Figura 10

stante a tratti della condizione iniziale. In ogni punto di salto, il corrispondente problema di Riemann viene risolto in modo approssimato mediante una funzione ancora costante a tratti, con un numero finito di salti nel piano $t-x$. La soluzione viene prolungata fino al primo istante t_1 in cui due o più linee di salto interagiscono fra loro. A questo punto si risolve il nuovo problema di Riemann determinato dall'interazione, e si prolunga la soluzione fino ad un istante t_2 quando ha luogo una seconda interazione, ecc...

Questa procedura determina una soluzione approssimata costante a tratti nel piano $t-x$, con salti lungo una famiglia finita di rette. Si osservi che nell'algoritmo di Glimm la posizione dei salti è fissata a priori, dovendo coincidere con i nodi della griglia. Nel front tracking invece la posizione dei salti cerca di adattarsi alla particolare soluzione che si va costruendo, «tracciando» i vari fronti d'onda. Da qui il nome dell'algoritmo. Grazie ad alcuni accorgimenti tecnici, il numero di fronti d'onda rimane limitato. Le stime uniformi sulla variazione totale delle soluzioni approssimate utilizzano le stesse idee introdotte da Glimm. Usando un teorema di compattezza, si riesce quindi ad estrarre una successione che converge in L^1_{loc} ad una soluzione debole del problema di Cauchy. Per maggiori dettagli si veda la monografia [2].

5. – Unicità ed approssimazioni viscosi.

Dopo il risultato di Glimm, per molti anni il problema dell'unicità delle soluzioni deboli è rimasto insoluto. La dimostrazione dell'esistenza si basava su una tecnica di compattezza: un'opportuna successione di soluzioni approssimate converge ad una soluzione esatta. In linea di principio, scegliendo diverse successioni si potrebbero ottenere limiti diversi. Una questione strettamente collegata all'unicità è la dipendenza delle soluzioni dal dato iniziale. Se si cambia di poco il dato iniziale, come varia la soluzione? In sostanza il problema sta nel dimostrare che i sistemi di leggi di conservazione sono **deterministici**: conoscendo lo stato del sistema ad un istante iniziale t_0 , il modello matematico determina univocamente l'evoluzione del sistema ad ogni tempo futuro $t > t_0$. Questi problemi sono stati studiati e

risolti in anni recenti dal gruppo di ricerca alla S.I.S.S.A. di Trieste. In sostanza, si è dimostrato che

• La soluzione ottenuta come limite di approssimazioni front tracking è unica e dipende con continuità dal dato iniziale.

• Una qualunque soluzione debole che soddisfa ulteriori condizioni di entropia coincide con la precedente soluzione costruita mediante front tracking, quindi è unica.

Per un compendio di questi risultati, si veda [2] oppure [3]. La distanza fra due soluzioni al tempo t viene qui misurata da

$$\|u(t) - v(t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t, x) - v(t, x)| dx.$$

Ad un qualunque istante $t > t_0$, questa distanza risulta maggiorata dalla distanza all'istante iniziale t_0 , moltiplicata per un'opportuna costante L , i.e.

$$(5.1) \quad \|u(t) - v(t)\|_{L^1} \leq L \|u(t_0) - v(t_0)\|_{L^1}.$$

Per dimostrare la dipendenza continua delle soluzioni dai dati iniziali, è utile dapprima studiare come si comporta una piccola perturbazione. Nel caso di soluzioni approssimate ottenute con lo schema di Glimm, è pressoché impossibile dare alcuna stima in questa direzione. Per le approssimazioni front tracking, invece, c'è un modo naturale di perturbare il dato iniziale. Possiamo infatti spostare la posizione di un salto all'istante $t = 0$ e calcolare in qual misura vengono modificate le posizioni dei vari fronti d'onda in istanti successivi. Un esempio è qui illustrato nella figura 11. Supponiamo di modificare il dato iniziale, spostando uno dei salti da x al punto x' . I fronti d'onda che prima uscivano da x si troveranno quindi in posizione leggermente diversa (linee tratteggiate). In particolare, i due fronti che prima si incontravano in P ora interagiranno in un diverso punto P' , e tutti i fronti uscenti dall'interazione risulteranno a loro volta spostati. Calcolando lo spostamento subito dai vari fronti d'onda ad ogni istante $t > 0$, possiamo quindi stimare la distanza fra la soluzione iniziale e quella perturbata. Questo punto di vista costituisce il modo più intuitivo per arrivare alla stima (5.1).

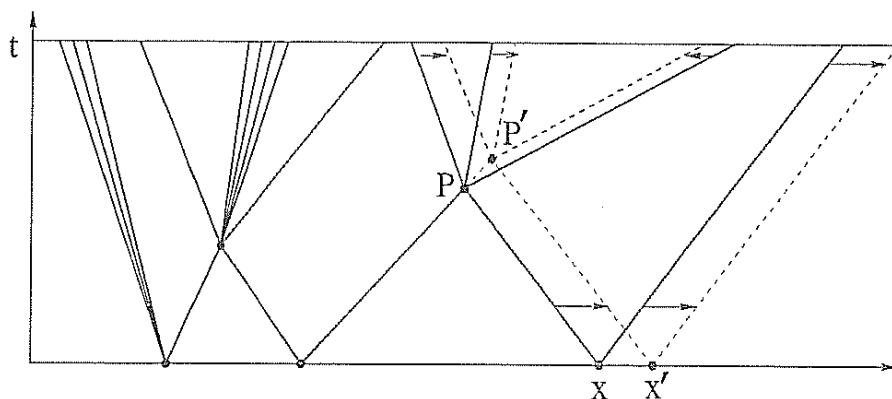


Figura 11

Un approccio completamente diverso al problema dell'unicità consiste nello studio delle approssimazioni viscosi. Assieme al problema (4.2), consideriamo un sistema con «piccola viscosità»

$$(5.2) \quad u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x = \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(0, x) = \varphi(x).$$

L'aggiunta di un termine contenente la derivata seconda di u cambia la natura del sistema, rendendolo parabolico. La soluzione u^ε sarà quindi regolare per tutti i tempi $t \geq 0$. Mandando il parametro ε a zero, ci aspettiamo che u^ε converga ad una soluzione u del problema iperbolico (4.2). Inoltre, la piccola viscosità dovrebbe automaticamente selezionare al limite un'unica soluzione «buona», soddisfacente alle condizioni di entropia. È da notare che, se la soluzione limite u è essa stessa regolare, allora la convergenza $u^\varepsilon \rightarrow u$ si dimostra facilmente. Bisogna però tenere a mente che in generale la soluzione debole del sistema iperbolico (4.2) è discontinua (fig. 12). In tal caso, nell'intorno di un punto in cui u ha un salto, la derivata prima u_x^ε di queste approssimazioni viscosi tende all'infinito, e la derivata seconda u_{xx}^ε si comporta in modo ancora più singolare. La convergenza $u^\varepsilon \rightarrow u$ è quindi tutt'altro che semplice da analizzare.

Nel caso di una singola legge di conservazione, la prima dimostrazione di questa convergenza è dovuta a O. Oleinik [10], mentre in [6] S. Kruzhkov ha trattato il caso scalare in più variabili spaziali.

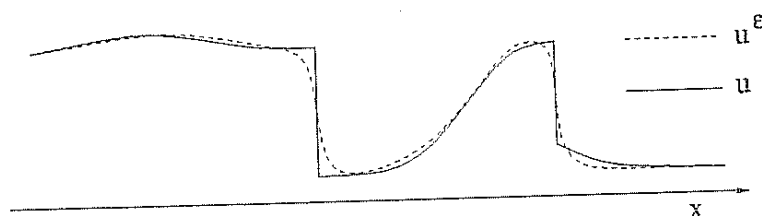


Figura 12

Il caso di sistemi di n equazioni (in una sola variabile spaziale) è stato risolto molto recentemente in [1], da S. Bianchini assieme all'autore di questa nota.

Va osservato che, nel caso di sistemi $n \times n$ di leggi di conservazione, pressoché tutta la teoria precedente si basava sull'analisi del problema di Riemann. Il ruolo centrale della soluzione di Riemann è giustificato da una fondamentale simmetria dei sistemi (3.1). Infatti, se $u = u(t, x)$ è soluzione, allora per ogni $\theta > 0$ anche la funzione riscalata

$$u^\theta(t, x) = u(\theta t, \theta x)$$

è una soluzione. Le soluzioni invarianti rispetto a questo gruppo di simmetria, con $u^\theta = u$ per ogni θ , sono proprio le soluzioni del problema di Riemann. Nell'analisi delle approssimazioni viscosi

$$(5.3) \quad u_t + A(u) u_x = u_{xx}$$

invece, il problema di Riemann non gioca più alcun ruolo particolare. Le soluzioni «elementari» da cui partire per comprendere la generica soluzione della (5.3) sono le cosiddette **onde viaggianti viscosi**, i.e. soluzioni particolari dalla forma

$$(5.4) \quad u(t, x) = U(x - \lambda t).$$

È facile controllare che la funzione u in (5.4) è soluzione della (5.3) se e solo se la U soddisfa l'equazione differenziale ordinaria di secondo ordine

$$-\lambda U' + A(U) U' = U''.$$

Il nuovo punto di vista, proposto in [1], consiste nel decomporre lo-

calmente il profilo di una qualunque soluzione come superposizione di onde viaggianti viscosi. Questo approccio, oltre a permettere un'analisi accurata dei sistemi con piccola viscosità, ha fornito nuovi risultati di esistenza, unicità e stabilità in una classe più ampia di sistemi iperbolici, anche non in forma conservativa.

6. - Qualche problema aperto.

Nonostante i progressi recenti e la vigorosa attività di ricerca in ambito internazionale, la teoria dei sistemi iperbolici è tuttora poco sviluppata, e molte questioni fondamentali rimangono insolute [8, 12]. Mi limito qui a segnalarne due, di particolare importanza.

1. Lo studio delle soluzioni deboli per sistemi iperbolici di leggi di conservazione in più variabili spaziali ha grande interesse applicativo. Tuttavia, per sistemi del tipo

$$(6.1) \quad \frac{\partial}{\partial t} u + \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} f_k(u) = 0$$

non esiste ancora nessun teorema generale sull'esistenza globale di soluzioni deboli, comparabile al risultato dimostrato da Glimm nel caso $m = 1$. In una variabile spaziale è possibile costruire soluzioni nello spazio BV delle funzioni a variazione limitata. In più dimensioni, è ancora possibile dare una nozione di «variazione totale» di una funzione. Nel caso di una singola legge di conservazione, l'esistenza ed unicità delle soluzioni nello spazio BV è stata dimostrata da Volpert [14]. Questi risultati però non si possono estendere ai sistemi del tipo (6.1), perché in tal caso la variazione totale non rimane limitata nel tempo. In definitiva, lo spazio BV non sembra essere lo spazio adatto in cui cercare soluzioni di sistemi iperbolici, nel caso multidimensionale. Non è ancora chiaro in quale spazio funzionale converga lavorare, cercando un qualche criterio di compattezza che garantisca l'esistenza di soluzioni.

2. Tornando ai sistemi in una dimensione spaziale, ha qui interesse studiare il comportamento di soluzioni con dati grandi. Per il teorema di Glimm, se inizialmente la variazione totale è sufficientemen-

te piccola, essa rimane piccola per ogni $t \geq 0$. Al contrario, per dati iniziali grandi, la soluzione può diventare illimitata in tempo finito. Un esempio in questa direzione è stato costruito da H.K.Jenssen (2000), per un sistema di 3 leggi di conservazione. Questo sistema però non ha significato fisico; in particolare esso non ammette nessuna entropia convessa. Resta ancora da capire se questo fenomeno di blow-up possa effettivamente aver luogo per soluzioni del sistema della gas-dinamica e di altre equazioni della fisica matematica. O se invece la presenza di un'entropia strettamente convessa impedisca fenomeni patologici quali il blow-up delle soluzioni.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [1] S. BIANCHINI - A. BRESSAN, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*, Annals of Mathematics, in corso di stampa.
- [2] A. BRESSAN, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws. The One Dimensional Cauchy Problem*, Oxford University Press, 2000.
- [3] A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing 2002, Vol. I. Higher Education Press (2002), 159-178.
- [4] L. EULER, *Principes généraux des mouvement des fluides*, Mém. Acad. Sci. Berlin, 11 (1755), 274-315.
- [5] J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math., 18 (1965), 697-715.
- [6] S. KRUSHKOV, *First order quasilinear equations with several space variables*, Math. USSR Sbornik, 10 (1970), 217-243.
- [7] P. LAX, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 537-566.
- [8] P. LAX, *Problems solved and unsolved concerning nonlinear P.D.E.*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Warszawa 1983, Elsevier Science Pub. (1984), 119-138.
- [9] J. VON NEUMANN, *Theory of shock waves*, Collected Works, Vol. VI, pp. 178-202. Oxford: Pergamon Press, 1963.
- [10] O. OLEINIK, *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl., 26 (1963), 95-172.
- [11] B. RIEMANN, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Göttingen Abh. Math. Cl., 8 (1860), 43-65.

- [12] D. SERRE, *Systems of conservation laws: A challenge for the XXI century*, in *Mathematics Unlimited - 2001 and beyond*, B. Engquist and W. Schmid ed., Springer-Verlag, 2001.
- [13] J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [14] A. I. VOLPERT, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR Sbornik, 2 (1967), 225-267.

Per ulteriori informazioni di carattere storico - biografico, segnaliamo il sito web:
<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>

Alberto Bressan, S.I.S.S.A., Via Beirut 4, Trieste 34014.
E-mail: bressan@sissa.it