

Conversazioni leggere sulle leggi di conservazione

CORRADO MASCIA

Dipartimento di Matematica "G. Castelnuovo"

Universita' di Roma "La Sapienza"

`mascia@mat.uniroma1.it`

versione 2.0 — September 1, 2009

CONTENTS

1. Le equazioni di Eulero isentropico	1
1.1. Conservazione della massa	2
1.2. Equazione di trasporto	3
1.3. Equazione di bilancio della quantita' di moto	5
1.4. In sintesi	8
2. La legge di conservazione scalare	10
2.1. Metodo delle caratteristiche ed esistenza locale	10
2.2. Formazione di singolarita'	13
2.3. Viscosita' evanescente	14
3. Oltre la singolarita'	17
3.1. Onde di shock	17
3.2. Soluzioni ammissibili	20
3.3. Formulazione debole	24
3.4. Entropie	30
4. Soluzioni	32
References	33

Avvertenza all'eventuale lettore della versione 1.0. Queste Note sono il prodotto e la sorgente di 4 lezioni tenute per l'*Incontro Borsisti Indam*, Perugia, 21–25 Agosto 2006, indirizzate a studenti di Matematica del secondo anno di corso della laurea triennale. Ho cercato di dare una panoramica dei problemi e delle strutture interessanti che emergono nelle leggi di conservazione. In questo senso, ho preferito dare piu' spazio alla presentazione di quelle che mi sembrano le idee principali e, almeno in parte, digeribili da persone che, da poco, si affacciano allo studio della matematica. Leggendo, quindi, non aspettatevi rigore e completezza nella trattazione degli argomenti, quanto accenni e indicazioni. Da buon imbianchino, ho cercato di passare una mano di mordente, in preparazione allo strato di vernice vera e propria (che potrebbe venire da una sana lettura di uno dei testi segnalati in Bibliografia). Mi auguro che possa aiutare a realizzare una pittura ben riuscita e duratura nel tempo. Saro' grato a chi mi dovesse segnalare errori (di scrittura, concettuali, ecc.).

Un grazie sostanzioso ai pazienti uditori dei miei 240 minuti di sproloqui.

Avvertenza all'eventuale lettore della versione 2.0. La versione che avete tra le mani e' la versione rivista per alcune lezioni (due?) del corso di eccellenza, Dipartimento di Matematica "G.Castelnuovo", Sapienza, Universita' di Roma, a.a. 2007/08.

1. LE EQUAZIONI DI EULERO ISENTROPICO

Sia D una regione di $\mathbb{R}^n$ (nel caso "fisico" $n = 2$ o $n = 3$) che consideriamo riempita di un fluido.

Obiettivo. Descrivere il moto del fluido.

Fissato $x \in D$, di coordinate $(x_1, \dots, x_n)$, consideriamo il moto di una particella di fluido che passa per x all'istante t e indichiamo con $v = v(x, t)$ la velocita' della particella. Per ogni punto della regione D e' ben definito il campo vettoriale v detto CAMPO DI VELOCITA' DEL FLUIDO.

Supponiamo che sia ben definita la funzione DENSITA' DI MASSA $\rho = \rho(x, t)$ che (per definizione!) e' tale che la massa di fluido presente in $\Omega \subset D$ al tempo t e' data da

$$\int_{\Omega} \rho(x, t) dx.$$

Sempre e comunque assumero' che le funzioni u e ρ siano regolari quanto serve per dare senso a tutto quel che scrivero' da qui in avanti.

La derivazione delle equazioni per il fluido si basa su due principi fondamentali:

- conservazione della massa;
- il tasso di variazione di quantita' di moto e' pari alle forze applicate.

1.1. Conservazione della massa. Dato $x \in D$, indichiamo con $\phi(x, t)$ la posizione al tempo t della particella che al tempo $t = 0$ si trova nella posizione x . Supponiamo che la funzione ϕ sia regolare e che, per ogni t fissato, la funzione $\phi_t(\cdot) := \phi(\cdot, t)$ sia invertibile. Per definizione, il campo di velocita' v coincide con $\partial\phi/\partial t$, precisamente vale la relazione

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}(x, t) = v(\phi(x, t), t).$$

Data una regione di riferimento Ω al tempo $t = 0$, $\Omega_t := \phi_t(\Omega)$ indica la posizione delle particelle che al tempo $t = 0$ si trovavano in Ω . Il tasso di variazione di massa relativo ad Ω e'

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx.$$

e l'equazione di conservazione della massa si puo' scrivere, in forma integrale, come

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx = 0.$$

Cambiando variabile nell'integrale, si ottiene

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\phi(x, t), t) J(x, t) dx,$$

dove $J(x, t)$ e' lo jacobiano della trasformazione ϕ_t . Passando la derivata sotto il segno di integrale,

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t} \rho(\phi(x, t), t) J(x, t) dx + \int_{\Omega} \rho(\phi(x, t), t) \frac{\partial}{\partial t} J(x, t) dx$$

Si tratta ora di calcolare i due termini.

Per quanto riguarda il primo, se f e' una funzione di $(\phi(x, t), t)$, allora

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\phi(x, t), t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\phi(x, t), t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\phi(x, t), t) \frac{d\phi_j}{dt}(t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\phi(x, t), t) + \mathbf{v}(\phi(x, t), t) \cdot \nabla f(\phi(x, t), t) = \frac{Df}{Dt} \end{aligned}$$

e, *en passant*, vi comunico che l'operatore

$$\frac{D}{Dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla$$

e' detto DERIVATA MATERIALE.

Per il secondo termine di (2), si tratta di calcolare la derivata rispetto al tempo dello jacobiano J .

Esercizio 1.1. *Dimostrare la relazione*

$$(3) \quad \frac{\partial J}{\partial t}(x, t) = \operatorname{div}(\mathbf{v}(\phi(x, t), t)) J(x, t).$$

Inserendo (3) in (2) e tornando alle variabili originali, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho \right) J dx + \int_{\Omega} \rho \operatorname{div} \mathbf{v} J dx \\ &= \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dx = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dx. \end{aligned}$$

L'uguaglianza tra il primo e l'ultimo termine e' noto come TEOREMA DEL TRASPORTO.

La conservazione della massa si puo' quindi esprimere nella forma

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right\} dx = 0.$$

Dato che questa relazione valga per ogni regione Ω , essa e' equivalente a

$$(4) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

che e' l'equazione differenziale che esprime la *conservazione della massa*. L'equazione (4) e' anche detta *equazione di trasporto*, perche' descrive il trasporto della quantita' di densita' ρ con campo di velocita' $\mathbf{v}$. Si tratta di un'equazione lineare in ρ e, in linea di principio, puo' essere studiata indipendentemente da quel che segue supponendo il campo di velocita' $\mathbf{v}$ assegnato.

Dal nostro punto di vista, invece, il campo di velocita' $\mathbf{v}$ e' esso stesso un'incognita. Ci sono quindi due possibili punti di vista. O la funzione $\mathbf{v}$ si considera nota

e si studia la corrispondente **equazione di trasporto**. O, in alternativa, bisogna trovare/proporre altre equazioni soddisfatte da ρ e da v che "chiudano" il sistema, cioè forniscano un numero di relazioni pari al numero di incognite.

1.2. Equazione di trasporto. Semplifichiamoci la vita: consideriamo il caso in cui x sia unidimensionale e la funzione $v = v(x)$ sia assegnata e sufficientemente regolare (ad esempio, di classe C^1). In questo caso, una classe di soluzioni facili dell'equazione di trasporto, è data dalle soluzioni stazionarie, cioè dalle soluzioni indipendenti dal tempo: $\rho(x, t) = \rho(x)$. In questo caso, l'equazione diviene

$$\frac{\partial}{\partial x}(v(x) \rho) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad v(x) \rho(x) = C \in \mathbb{R}.$$

Se $v(x) \neq 0$ per ogni x , si ha

$$\rho(x) = \frac{C}{v(x)} \in \mathbb{R}.$$

Si noti che, anche se si tratta di una configurazione stazionaria in termini di densità, le singole particelle che compongono il mezzo si spostano con velocità $v = v(x)$, quindi niente è fermo. Se volete, potete vedere questa situazione come una banale controparte matematica dell'annoso dibattito tra Eràclito e Parmenide...

Poniamoci il problema di determinare la soluzione del **problema di Cauchy** seguente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(v(x) \rho) = 0, \quad \rho(x, 0) = \rho_0(x),$$

dove $\rho_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione assegnata, anch'essa sufficientemente regolare.

Un primo caso banale: $v(x) = 0$ per ogni x . In questo caso l'equazione indica che la soluzione è indipendente da t e, di conseguenza, è data da

$$\rho(x, t) = \rho_0(x) \quad \forall t.$$

Facciamo un (piccolo) passo in avanti e consideriamo il caso

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0,$$

dove $v_0 \in \mathbb{R}$. In questo caso, possiamo sfruttare una proprietà interessante dell'equazione di trasporto...

Invarianza galileiana. Consideriamo il cambio di variabile seguente: dato $s \in \mathbb{R}$,

$$\xi := x - s t, \quad \tau = t,$$

che corrisponde a considerare un sistema di riferimento che si sposta con velocità s . Coerentemente, dato che v_0 è la velocità nel sistema di riferimento (x, t) , poniamo

$$w_0 := v_0 - s$$

di modo che w_0 indichi la velocità nel sistema di riferimento (ξ, τ) . Dal Teorema di derivazione di funzione composta, segue

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} - s \frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Quindi, nelle nuove variabili (ξ, τ) l'equazione di trasporto diviene

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + (v_0 - s) \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0,$$

ovvero

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} + w_0 \frac{\partial \rho}{\partial \xi} = 0,$$

La forma dell'equazione resta dunque la stessa. In particolare, scegliendo $s = 0$, otteniamo il caso precedente dell'equazione con velocità nulla. Quindi vale $\rho(\xi, \tau) = \rho_0(\xi)$ e, in termini di (x, t) , si ha

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_0 \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \end{cases} \iff \rho(x, t) = \rho_0(x - v_0 t).$$

Cerchiamo altri esempi possibili, questa volta con v variabile. Ad esempio, consideriamo

$$v(x) = a x \quad a \in \mathbb{R}$$

cioè studiamo

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (a x \rho) = 0, \\ \rho(x, 0) = \rho_0(x), \end{cases}$$

1.3. Equazione di bilancio della quantità di moto. Esattamente come nel caso della conservazione della massa, fissiamo una regione Ω e scriviamo le corrispondenti relazioni di equilibrio, dando luogo a formulazioni di tipo integrale. Successivamente, data l'arbitrarietà di Ω , passeremo alla formulazione locale.

Fissiamo di nuovo una regione di riferimento Ω al tempo $t = 0$ e consideriamo la sua evoluzione al tempo t , $\Omega_t := \phi_t(\Omega)$. Il tasso di variazione della quantità di moto relativo ad Ω è

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dx.$$

Si tratta ora di scrivere la relazione di equilibrio tra questo termine e quello che rappresenta le forze agenti su Ω_t .

Nei mezzi continui, le forze sono divise in due classi: le FORZE DI VOLUME (ad esempio la gravità) esercitate direttamente sul volume Ω e le FORZE DI STRESS che sono le forze esercitate dal mezzo stesso attraverso la superficie $\partial\Omega$ su Ω . Le forze di volume si assume che si possano modellizzare tramite un campo vettoriale $\mathbf{b}$ che descrive la forza di volume per unità di massa. Il contributo nell'equazione di bilancio della quantità di moto è quindi dato da

$$\int_{\Omega_t} \rho \mathbf{b} dx.$$

Per quanto riguarda le forze di stress si suppone valido il seguente

PRINCIPIO DI CAUCHY. *L'azione sul dominio Ω della restante parte del mezzo in considerazione si rappresenta tramite una distribuzione di vettori τ , ciascuno applicato ad un punto di $\partial\Omega$.*

Il vettore τ dipende dalla posizione e dall'orientamento n relativo della superficie: $\tau = \tau(x, t; n)$ e, di conseguenza, il contributo corrispondente nell'equazione di bilancio e'

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA.$$

In definitiva, l'equazione di bilancio della quantita' di moto si puo' scrivere, in forma integrale, come

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho v dx = \int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA + \int_{\Omega_t} \rho b dx.$$

Per arrivare ad una formulazione locale, bisogna pedalare ancora un po'. Come portare sotto segno di integrale la derivata temporale presente nel primo integrale? Da non dimenticare il fatto che anche il dominio di integrazione varia con il tempo... Come trasformare l'integrale su $\partial\Omega_t$ in un integrale di volume? Nel caso della conservazione della massa, e' stato di fondamentale aiuto il teorema della divergenza. Ma qui, almeno per ora, non sembra sia applicabile!

Partiamo dal primo termine di (5). Qui si procede in maniera estremamente simile a quanto visto per la conservazione della massa: cambiando variabile nell'integrale e derivando sotto segno di integrale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} J dx = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) J dx + \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v}) \frac{\partial J}{\partial t} dx$$

Utilizzando l'operatore di derivata materiale, la precedente relazione si riscrive come

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dx = \int_{\Omega} \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) J dx + \int_{\Omega} (\rho \mathbf{v}) \frac{\partial J}{\partial t} dx$$

Grazie a (3), la precedente relazione diventa

$$(6) \quad \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{v} dx = \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} \right\} dx.$$

Il secondo membro di (6) puo' essere scritto in forme equivalenti¹:

$$\frac{D}{Dt}(\rho \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v} = \rho \left\{ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right\} = \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})$$

dove nella prima ho usato l'equazione di conservazione della massa e, nella seconda, $\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ e' una matrice $n \times n$ (prodotto tensoriale tra i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$), ovvero, in

¹Per l'ultima uguaglianza, basta osservare che il termine $\mathbf{v} \cdot \nabla(\rho v_i) + \rho v_i \operatorname{div} \mathbf{v}$ si scrive come

$$\sum_j v_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i) + \rho v_i \sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho v_i v_j) = \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v})_i.$$

coordinate, si tratta della matrice di componenti $v_i w_j$ e l'operatore div applicato ad una matrice indica la divergenza fatta riga per riga.

Si tratta ora di mettere mano all'integrale in (5)

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA.$$

Il vettore τ e' detto SFORZO SPECIFICO e il seguente Lemma ne descrive in maniera precisa la dipendenza dal vettore n , normale a $\partial\Omega_t$.

Lemma 1.2. (Cauchy) *Il vettore $\tau = \tau(x, t, n)$ e' lineare in n , cioe' per ogni (x, t) esiste una trasformazione lineare $\mathbb{T} = \mathbb{T}(x, t)$ tale che*

$$\tau(x, t, n) = \mathbb{T}(x, t) n.$$

L'applicazione T e' detta TENSORE DEGLI SFORZI.

Cenno di dimostrazione. Vediamo la versione bidimensionale. Consideriamo il triangolo T di vertici $O = (0, 0)$, $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ e sia $\ell := \sqrt{a^2 + b^2}$. Indico con $n = (n_1, n_2) = (b, a)/\ell$ la normale al segmento AB uscente dal triangolo T . Per $\ell \rightarrow 0$, in (5), gli integrali di volume sono di ordine ℓ^2 , mentre l'integrale di superficie e' di ordine ℓ . Dato che la somma dei tre contributi deve essere nulla per ogni ℓ , deve valere

$$\lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{1}{\ell} \int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA = 0.$$

Per ℓ piccolo, vale l'approssimazione

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA \approx \tau(n) \ell + \tau(-e_1) b + \tau(-e_2) a = \ell (\tau(n) + \tau(-e_1) n_1 + \tau(-e_2) n_2)$$

Quindi $\tau(n) \approx -\tau(-e_1) n_1 - \tau(-e_2) n_2$. Per il principio di azione e reazione, $\tau(-e_j) = -\tau(e_j)$, quindi

$$\tau(n) \approx \tau(e_1) n_1 + \tau(e_2) n_2,$$

cioe' τ e' una funzione lineare delle componenti di n . □

Grazie al Lemma di Cauchy, l'integrale su $\partial\Omega_t$ in (5) si riscrive come

$$\int_{\partial\Omega_t} \tau(x, t; n) dA = \int_{\partial\Omega_t} T(x, t) n dA,$$

e quindi, utilizzando il Teorema della divergenza, come

$$\int_{\Omega_t} \text{div } T(x, t) dx.$$

Quindi $\text{div } T$ indica il vettore ottenuto applicando l'operatore div ad ogni riga della matrice T .

In definitiva, la relazione di bilancio (5) si riscrive nella forma

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \text{div}(\rho v \otimes v) - \text{div } T(x, t) - \rho b \right\} dx = 0$$

Data l'arbitrarietà di Ω , la relazione precedente può essere localizzata dando luogo all'equazione

$$(7) \quad \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbb{T}(x, t) = \rho b$$

Equivalentemente la precedente relazione può essere scritta nella forma

$$(8) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} - \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \mathbb{T}(x, t) = b$$

Per semplicità, da qui in poi consideriamo il caso in cui siano assenti forze di volume, cioè $b = 0$.

Se la variabile spaziale è unidimensionale, i.e. $x \in \mathbb{R}$, la velocità $\mathbf{v}$ e il tensore degli sforzi $\mathbb{T}$ sono scalari, $\mathbf{v} = v \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{T} = T \in \mathbb{R}$. L'equazione (7) prende la forma

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 - T) = 0$$

Nel caso bidimensionale, $x = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, il vettore velocità $\mathbf{v}$ ha due componenti, (u, v) , e il tensore degli sforzi $\mathbb{T}$ è una matrice 2×2 , $\mathbb{T} = (T_{ij})_{i,j=1,2}$. Si ha

$$\mathbf{v} \otimes \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u^2 & uv \\ uv & v^2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \rho u^2 & \rho uv \\ \rho uv & \rho v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv), \\ \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2) \end{pmatrix}$$

Quindi, componente per componente, l'equazione (7) si scrive come

$$\begin{cases} \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 - T_{11}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - T_{12}) = 0 \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv - T_{21}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 - T_{22}) = 0 \end{cases}$$

1.4. In sintesi. Raccogliamo le idee. Le incognite ρ e $\mathbf{v}$ verificano le equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \\ \frac{\partial(\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) - \operatorname{div} \mathbb{T}(x, t) = 0 \end{cases}$$

Si tratta di $n + 1$ equazioni per $n + 1$ incognite. Ma con un problema non da poco: il termine $\mathbb{T}$, tensore degli sforzi, è una nuova incognita del problema. E si tratta di una quantità che ha n^2 componenti! Soluzione? Introdurre ipotesi aggiuntive sul tensore $\mathbb{T}$. Le ipotesi derivano da considerazioni di tipo fisico.

Definizione 1.3. Si chiama FLUIDO PERFETTO (o IDEALE) un materiale per cui

$$\mathbb{T}(x, t) = -q(x, t) \mathbb{I}$$

dove $\mathbb{I}$ è la matrice identità.

Se la funzione q e' funzione della densita' ρ , cioe' se vale l'equazione di stato

$$q(x, t) = p(\rho(x, t))$$

il fluido si dice **ISENTROPICO**. La funzione p e' detta **PRESSIONE**.

Il significato di queste definizioni diviene chiaro se si ripensa al significato fisico del tensore di stress. Questo infatti deriva dalle forze superficie che il materiale esercita su se' stesso. La richiesta $\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$ indica che tali forze sono normali alla superficie, con intensita' data dalla pressione p .

Le equazioni per un fluido perfetto isentropico, quindi, sono

$$(9) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v \otimes v + p(\rho) I) = 0 \end{cases}$$

I gas possono spesso essere visti come fluidi isentropici con equazione di stato $p = p(\rho) = A \rho^\gamma$, con A e γ costanti, $\gamma \geq 1$.

Utilizzando la prima equazione, la seconda puo' essere riscritta come

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v + \frac{1}{\rho} \nabla p(\rho) = 0,$$

e ponendo

$$w(\rho) = \int^\rho \frac{p'(s)}{s} ds + \text{costante},$$

il sistema diventa

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho v) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla) v + \nabla w(\rho) = 0, \end{cases}$$

La funzione $w = w(\rho)$ e' detta **ENTALPIA**.

Il sistema (9) e' il prototipo di sistema di **LEGGI DI CONSERVAZIONE**, cioe' di sistema della forma

$$\frac{\partial}{\partial t} A_0(w) + \operatorname{div} A_1(w) = 0.$$

In questo caso:

$$w = \begin{pmatrix} \rho \\ v \end{pmatrix}, \quad A_0(w) = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix}, \quad A_1(w) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v \otimes v + p(\rho) I \end{pmatrix}.$$

La trasformazione $w \mapsto u := A_0(w)$ e' invertibile per $\rho > 0$. Quindi il sistema puo' essere riscritto nella forma

$$(10) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{div} F(u) = 0.$$

dove $F(u) := A_1(A_0^{-1}(u))$.

Nel caso unidimensionale, $x \in \mathbb{R}$, il sistema e'

$$(11) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial F(u)}{\partial x} = 0.$$

2. LA LEGGE DI CONSERVAZIONE SCALARE

In tutta questa Sezione, mi occupo semplicemente di leggi di conservazione scalari, cioè di equazioni della forma

$$(12) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0.$$

dove $u \in \mathbb{R}$.

2.1. Metodo delle caratteristiche ed esistenza locale. Il primo caso che viene in mente e' il caso di una funzione f lineare: $f(u) = au$ con $a \in \mathbb{R}$.

$$(13) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Come sono fatte le soluzioni dell'equazione? Come e' fatta, se c'e' la soluzione del problema di Cauchy per (13) con dato iniziale

$$u(x, 0) = u_0(x)$$

con u_0 funzione assegnata? Nel seguito, supporro' sempre che u_0 sia una funzione limitata.

Niente di piu' facile. Infatti, basta cambiare il sistema di riferimento: ponendo $y = x - at$ e $v(y, t) = u(x, t)$ (cioe' la funzione v e' la funzione u vista nel nuovo sistema di riferimento), si vede subito che la funzione v e' soluzione del problema di Cauchy

$$\frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad v(y, 0) = u_0(y).$$

La soluzione e' ovvia: $v(y, t) = u_0(y)$. Quindi tornando alle variabili e all'incognita originale si ottiene

$$u(x, t) = u_0(x - at).$$

Procedimento troppo facile... non ci aiuta per capire come comportarsi nel caso delle equazioni nonlineari. Propongo percio' una strategia diversa, nota come *metodo delle caratteristiche*.

Ispirato dal fatto che la velocita' di propagazione a pare significativa per l'equazione (13), sia $x = x(t)$ tale che

$$\frac{dx}{dt} = a.$$

Come varia la funzione u lungo una tale curva? Facile:

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} a = 0.$$

In altre parole, la funzione u e' costante lungo le curve (rette, in realta') della forma $x = at + C$ con $C \in \mathbb{R}$. Tali curve sono dette *caratteristiche*.

Come determinare la soluzione del problema di Cauchy? Dato (x, t) basta trovare la curva caratteristica che passa per quel dato punto e assegnare come valore ad u in (x, t) , il valore di u_0 lungo la stessa caratteristica: $u(x, t) = u_0(x - at)$. *En passant*, faccio notare che l'espressione $u_0(x - at)$ e' soluzione in senso classico di (13) solo se u_0 e' derivabile, ma che puo' ragionevolmente essere considerata **la** soluzione anche per u_0 meno regolari...

Bene, ora passiamo al caso nonlineare.

Analizziamo il modello piu' famoso: l'*equazione di Burgers (non viscosa)*

$$(14) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0.$$

Sviluppando la derivata rispetto ad x , si trova la forma equivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

La faccenda si fa subito piu' fastidiosa o intrigante, a seconda dei punti di vista. Il coefficiente di $\frac{\partial u}{\partial x}$, che nel caso precedente era costante, ora e' variabile e dipende dall'incognita stessa. Non possiamo pensare di sbrigarcela con un semplice cambio di variabili, cosi' come abbiamo fatto in precedenza.

Usiamo quindi il metodo delle caratteristiche. Cerchiamo le curve $x = x(t)$ tali che

$$\frac{dx}{dt} = u(x(t), t).$$

Come varia la funzione u lungo una tale curva? E' lo stesso conto di prima

$$\frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} u = 0.$$

Quindi la funzione u e' costante lungo $x = x(t)$ e, di conseguenza, le curve caratteristiche sono rette:

$$x(t) = x_0 + u_0(x_0) t.$$

La differenza fondamentale rispetto al caso lineare e' che in questo caso la pendenza delle rette (curve di livello di u) dipende dal valore che la funzione u assume su di esse. Non si tratta piu' di rette parallele.

Come determinare la soluzione del problema di Cauchy? Fissiamo un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ e indichiamo con $\bar{u}$ il valore della funzione u in questo punto, cioe' $\bar{u} := u(\bar{x}, \bar{t})$. Vogliamo determinare il valore $\bar{u}$.

La caratteristica per $(\bar{x}, \bar{t})$ ha equazione

$$x(t; \bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} + \bar{u}(t - \bar{t}).$$

Al tempo $t = 0$,

$$x(0; \bar{x}, \bar{t}) = \bar{x} - \bar{u} \bar{t},$$

quindi

$$\bar{u} = u_0(x(0; \bar{x}, \bar{t})) = u_0(\bar{x} - \bar{u} \bar{t}).$$

Togliendo tutte le barre, siamo arrivati all'espressione $u = u_0(x - ut)$ che e' una relazione implicita da cui vorremmo dedurre u in funzione di (x, t) . Per convincersi

che si tratta proprio dello stesso procedimento usato nel caso lineare con la differenza che in quel caso (e solo in quello) la relazione che si ottiene e' esplicita, basta che ripetiate gli stessi passi nel caso di una legge di conservazione (12) con f funzione (derivabile) qualsiasi.

Torniamo all'equazione di Burgers. Posto

$$F(x, t, u) := u - u_0(x - u t)$$

si tratta di stabilire se sia possibile dedurre l'esistenza di una funzione $u = u(x, t)$ tale che $F(x, t, u) = 0$ se e solo se $u = u(x, t)$. Dato che u_0 e' limitata,

$$F(x, t, \pm\infty) = \pm\infty,$$

quindi, se u_0 e' continua, per ogni (x, t) esiste almeno un valore $u = u(x, t)$ tale che $F(x, t, u) = 0$. In quali casi il valore di u e' unico? Supponendo che u_0 sia derivabile, posso derivare F rispetto ad u ottenendo

$$\frac{\partial F}{\partial u}(x, t, u) = 1 + u'_0(x - u t) t.$$

Quindi, fintanto che vale la condizione

$$1 + u'_0(y) t > 0 \quad \forall y$$

per ogni (x, t) esiste un unico u tale che $F(x, t, u) = 0$. In particolare, se $u'_0 \geq 0$, la condizione e' soddisfatta per ogni t . Si puo' mostrare che $u = u(x, t)$ e' la soluzione di problema di Cauchy. Pensateci voi.

In effetti, l'esistenza di un unico valore u puo' essere ottenuta anche richiedendo meno regolarita' sulla funzione u_0 . Basta che la funzione F sia monotona crescente in u :

$$\frac{F(x, t, u_1) - F(x, t, u_2)}{u_1 - u_2} > 0 \quad \forall u_1 \neq u_2.$$

Usando l'espressione di F , questa condizione diviene

$$1 + \frac{u_0(x - u_1 t) - u_0(x - u_2 t)}{(x - u_1 t) - (x - u_2 t)} t > 0 \quad \forall u_1 \neq u_2.$$

cioe'

$$-\frac{1}{t} < \frac{u_0(\xi_1) - u_0(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \quad \forall \xi_1 \neq \xi_2.$$

che si puo' riscrivere come

$$(15) \quad \frac{1}{t} > - \inf_{\xi_1 \neq \xi_2} \frac{u_0(\xi_1) - u_0(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2}.$$

In particolare, se u_0 e' una funzione nondecreciente, il valore dell'estremo inferiore dei rapporti incrementali e' non negativo e quindi la condizione di esistenza e' soddisfatta per ogni t . Altrimenti, la condizione (15) e' una condizione che limita il tempo di esistenza della soluzione:

$$t < T := \frac{1}{- \inf_{\xi_1 \neq \xi_2} (u_0(\xi_1) - u_0(\xi_2)) / (\xi_1 - \xi_2)}.$$

Cosa succede al tempo T ?

ESERCIZIO. Ripetere il conto appena fatto per il caso della legge di conservazione (12) con f generica. Cosa succede se f e' convessa/concava? E in generale?

2.2. Formazione di singolarita'. Cosa succede al tempo T ? Torniamo al metodo delle caratteristiche e al suo significato. Al tempo $t = 0$, la funzione u_0 e' assegnata e supponiamola derivabile. Da ogni punto $(\bar{x}, 0)$ dell'asse x , possiamo far partire una curva caratteristica di equazione

$$x(t) = \bar{x} + u_0(\bar{x})t$$

Si puo' mostrare (lo fate voi?) che l'insieme di queste rette costituisce un ricoprimento di un intorno dell'asse x . Piu' precisamente, si puo' mostrare che esiste $t_1 > 0$ tale che ogni (x, t) con $t \in (-t_1, t_1)$ appartiene ad una ed una sola curva caratteristica. Il valore della soluzione u in (x, t) e' il valore $u_0(\bar{x})$ della corrispondente retta caratteristica. Questo e' lo spirito di quanto fatto in precedenza.

Nel caso di un dato iniziale non decrescente, si vede facilmente che la stessa costruzione permette di individuare una soluzione per ogni $t > 0$. Le rette non si intersecano tra di loro nel semipiano superiore e tanto basta per definire in maniera univoca il valore della soluzione u in ciascun punto.

Se, al contrario, il dato iniziale e' tale che esistono $x_1 < x_2$ con $u_0(x_1) > u_0(x_2)$ accade qualcosa di "drammatico"... Le caratteristiche passanti dai punti $(x_1, 0)$ e $(x_2, 0)$ si intersecano in un punto $(\bar{x}, \bar{t})$ con $\bar{t} > 0$. Calcoliamo precisamente l'istante in cui le caratteristiche si intersecano: le due caratteristiche hanno equazioni $x = x_i + u_0(x_i)t$ con $i = 1, 2$, quindi

$$x_1 + u_0(x_1)\bar{t} = x_2 + u_0(x_2)\bar{t} \quad \Longleftrightarrow \quad \bar{t} = -\frac{1}{(u_0(x_1) - u_0(x_2))/(x_1 - x_2)}$$

Percio' la costruzione della soluzione con il metodo delle caratteristiche funziona per tempi t minori di T dove

$$T := \inf_{x_1 \neq x_2} -\frac{1}{(u_0(x_1) - u_0(x_2))/(x_1 - x_2)} = -\sup_{x_1 \neq x_2} \frac{1}{(u_0(x_1) - u_0(x_2))/(x_1 - x_2)} \\ = -\frac{1}{\inf_{x_1 \neq x_2} (u_0(x_1) - u_0(x_2))/(x_1 - x_2)},$$

cioe' proprio il valore determinato in precedenza.

E' possibile, e per la verita' non difficile, mostrare che al tempo T avviene una "catastrofe del gradiente", nel senso che

$$\lim_{t \rightarrow T^-} \sup_x |u_x(x, t)| = +\infty.$$

Tale catastrofe si puo' riconoscere euristicamente scrivendo l'equazione differenziale soddisfatta dalla funzione $v = u_x$. Derivando la legge di conservazione (12), si ottiene

$$(16) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + f'(u) \frac{\partial v}{\partial x} + f''(u) v^2 = 0.$$

Nel caso dell'equazione di Burgers,

$$(17) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v^2 = 0.$$

Lungo le caratteristiche della funzione u , la derivata v verifica l'equazione differenziale ordinaria $V' + V^2 = 0$ che ha soluzioni che esplodono in tempo finito (e' necessario e sufficiente che il dato iniziale $V(0) = u'_0(x_0)$ sia negativo per qualche x_0).

Per capire meglio cosa sta succedendo, consideriamo un dato iniziale specifico e calcoliamo esplicitamente la corrispondente soluzione:

$$u_0(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ 1 - ax & 0 \leq x < 1/a \\ 0 & x \geq 1/a \end{cases}$$

Il valore di T e'

$$T = -\frac{1}{\inf_{x_1 \neq x_2} (u_0(x_1) - u_0(x_2))/(x_1 - x_2)} = \frac{1}{a}.$$

Per $x < t$, il metodo delle caratteristiche fornisce il valore $u = 1$ e per $x \geq 1/a$ fornisce il valore 0. Nella regione determinata dalle caratteristiche uscenti dai punti $(x, 0)$ con $x \in [0, 1/a]$,

$$0 = u - u_0(x - ut) = u - 1 + a(x - ut) \quad \Longleftrightarrow \quad u = \frac{1 - ax}{1 - at}$$

La soluzione (locale in tempo) del corrispondente problema di Cauchy e' data da

$$u(x, t) = \begin{cases} 1 & x < t, \\ (1 - ax)/(1 - at) & t \leq x < 1/a \\ 0 & x \geq 1/a \end{cases}$$

Al tempo $t = 1/a$ la soluzione e' divenuta discontinua (ci sono infinite caratteristiche passanti per il punto $(1/a, 1/a)$). E' chiaro che, da questo istante in poi, non e' piu' possibile parlare di soluzioni in senso classico. Come procedere?

2.3. Viscosita' evanescente. Il dubbio e' amletico. Cosa fare ora che la soluzione e' divenuta palesemente discontinua? Possiamo fermarci qui, affermando che l'evoluzione perde di significato. Possiamo decidere di accettare soluzioni a piu' valori e, come se niente fosse, proseguire con il metodo delle caratteristiche anche oltre il tempo di intersezione. In questo modo si genera una superficie nello spazio (x, t, u) che non e' piu' rappresentabile globalmente come grafico $u = u(x, t)$. Oppure... oppure possiamo tornare alla domanda clou della questione: *perche' stiamo considerando leggi di conservazione?* Risposta facile: perche' vorremmo un modello matematico con cui descrivere un fenomeno fisico (ad esempio, la dinamica di un gas in condizioni opportune). Da questo punto di vista, la risposta giusta al dubbio amletico si ottiene ritornando al problema fisico.

In effetti, negli esperimenti, si osservano soluzioni discontinue, cioe' soluzioni che esibiscono salti spaziali nelle proprieta' materiali (pressione, temperatura...). E si

osserva anche che questi salti o bruschi cambiamenti si generano a partire da distribuzioni regolari e persistono nel tempo. Il modello giocattolo dell'equazione di Burgers si rivela, da questo punto di vista, un ottimo strumento: e' in grado di fornirci una rappresentazione semplificata del fenomeno di formazione di discontinuita' nella soluzione. Come "potenziare" il modello per descrivere anche l'evoluzione dei salti dopo l'istante in cui questi si formano?

La formazione del salto e' dovuta ad un effetto di compressione: valori di u che, inizialmente, si trovavano "lontani", ora si trovano vicini, troppo vicini, uno sull'altro! Si tratta quindi di capire meglio qualcosa che succede a livello microscopico e, per questo motivo, serve recuperare un elemento significativo del modello fisico: la *viscosita'*.

Nel caso che abbiamo considerato fin qui (senza viscosita'), le curve caratteristiche propagano ciascuna con la propria velocita' senza badare a quello che fanno le curve vicine. In maniera vagamente approssimativa, si puo' ritenere la viscosita' come un effetto di interazione tra particelle adiacenti e, in termini di caratteristiche, e' come tener conto di un effetto di "contagio" tra curve vicine. Piu' le caratteristiche sono ammassate in poco spazio e piu' la viscosita' gioca il suo ruolo cercando di "mediare" le velocita' di propagazione, impedendo, in qualche forma, che velocita' di propagazione troppo diverse convivano in zone troppo vicine.

Nel caso delle equazioni di Eulero isentropico, ci sono due ipotesi chiave. La prima e' quella di fluido perfetto, cioe' che il tensore di stress sia proporzionale alla matrice identita'. Questa proprieta' si traduce nell'assunzione che la forza tra parti adiacenti del mezzo eserciti una forza ortogonale alla superficie di contatto e non sia presenti effetti di "trascinamento" tangenziale. Nel caso unidimensionale, $x \in \mathbb{R}$, comunque, questo effetto non si vede per... mancanza di spazio.

La seconda ipotesi chiave e' quella di fluido isentropico, cioe' la richiesta che il coefficiente di proporzionalita' q sia funzione della densita'. Se, invece, si suppone una struttura del tipo

$$(18) \quad q = p(\rho) + \varepsilon \frac{\partial v}{\partial x}.$$

l'equazioni di Eulero nel caso unidimensionale, prendono la forma

$$(19) \quad \begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho v^2 + p(\rho)) = \varepsilon \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \end{cases}$$

Non intendo qui dire perche' e percome la precedenza assunzione possa avere senso nel modello fisico. Il fatto che la forma (18) possa sembrare opinabile o arbitrario non e' del tutto diseducativo... Possono coesistere modelli diversi che cercano di spiegare fenomeni diversi e che si traducono in forme diverse per le quantita' che descrivono il fenomeno. In qualche senso, non esiste un modello assoluto, ma tante varianti possibili. Un modello e' tanto piu' efficace quanto piu' e' in grado di fornire previsioni fedeli alla reale evoluzione del fenomeno sotto osservazione.

Nella versione giocattolo, la presenza della viscosita' si traduce nell'inserimento nell'equazione un termine perturbativo della forma εu_{xx} . Quindi la legge di conservazione viscosa e'

$$(20) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Il parametro ε misura l'intensita' del termine di viscosita': se e' piccolo, la viscosita' e' piccola (=poco dialogo tra curva caratteristiche vicine), se e' grande, la viscosita' e' grande (=molto dialogo). Nel caso lineare $f(s) = as$ con il cambio di variabile $x \mapsto x - at$, l'equazione (20) diventa l'equazione del calore

$$(21) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Chi ha visto e conosce qualcosa sulle soluzioni di questa equazione, capira' ancora meglio la questione del poco/tanto dialogo al variare di ε .

E' interessante notare che il parametro ε puo' essere assorbito nelle variabili indipendenti attraverso un *riscaldamento*. Ponendo

$$\xi := \frac{x}{\varepsilon} \quad \tau := \frac{t}{\varepsilon}, \quad u(x, t) = v(\xi, \tau),$$

si ha

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f(u) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \xi} f(v), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Percio' la funzione v e' soluzione di

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi} f(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Da questo punto di vista, a cosa corrispondere trascurare la viscosita', cioe' passare al limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$? A calcolare il limite:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(x/\varepsilon, t/\varepsilon),$$

cioe' a guardare la soluzione v (relativa all'equazione con viscosita' normalizzata ad 1) su una scala spazio-temporale diversa. In qualche senso, e' come guardare la soluzione "da lontano". Viceversa, l'introduzione della viscosita' corrisponde a guardare la soluzione da vicino, cioe' ad analizzarne il comportamento microscopico.

Spero che, a questo punto, sia chiara la filosofia: rilevata la presenza di un problema (la formazione di una singolarita'), si introduce il termine di viscosita' che corrisponde ad utilizzare un microscopio per vedere piu' da vicino cosa sta succedendo in prossimita' del punto "problematico".

ESERCIZIO. Sia $a \in \mathbb{R}$. Determinare la soluzione del problema di Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x) := \begin{cases} u_- & x < 0, \\ u_+ & x \geq 0, \end{cases}$$

con $u_{\pm} \in \mathbb{R}$ assegnati. Quanto vale il limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} u(x, t)$?

3. OLTRE LA SINGOLARITA'

3.1. Onde di shock. Siamo arrivati a stabilire che leggi di conservazione possono generare in tempo finito delle discontinuità. La strada che proponiamo di risoluzione delle discontinuità è l'introduzione di un termine di viscosità che, in qualche forma, dovrebbe regolarizzare l'equazione. L'idea è che *le soluzioni "fisiche" di (12) sono tutte e sole i limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ di soluzioni di (20).*

Le soluzioni di (20) non sono particolarmente facili da trovare. Perciò limitiamoci ad un classe più semplice: le soluzioni stazionarie: $u(x, t) = \phi_\varepsilon(x)$ con ϕ_ε da trovare. In più, per avere soluzioni di significato fisico, cerchiamo soluzioni globali,

Lavoriamo con l'equazione di Burgers con viscosità

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La funzione ϕ_ε deve verificare la relazione

$$\left(\frac{1}{2} \phi_\varepsilon^2 \right)' = \varepsilon \phi_\varepsilon''.$$

La costante ε può essere facilmente "eliminata" tramite un cambio di variabili. Se

$$\phi_\varepsilon(x) = \Phi \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

la funzione Φ verifica

$$\left(\frac{1}{2} \Phi^2 \right)' = \Phi''.$$

Integrando

$$\Phi' = \frac{1}{2} (\Phi^2 - C) \quad C \in \mathbb{R}.$$

Se $C < 0$, non ci sono soluzioni globali e il caso non è particolarmente interessante. Se $C = 0$, l'unica soluzione globale è $\Phi \equiv 0$ che, di nuovo, non è così significativa... Considero il caso $C = a^2 > 0$

$$\Phi' = \frac{1}{2} (\Phi^2 - a^2) \quad a > 0.$$

C'è da pensarci? No, uso la separazione di variabili. Dato che

$$\frac{1}{s^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left(\frac{1}{s - a} - \frac{1}{s + a} \right),$$

le soluzioni verificano

$$\ln \left| \frac{\Phi(x) - a}{\Phi(x) + a} \right| = a(x - x_0)$$

per qualche $x_0 \in \mathbb{R}$. Le uniche soluzioni globali sono quelle comprese tra i valori $-a$ e a . Per queste, la precedente relazione diviene

$$\frac{a - \Phi(x)}{a + \Phi(x)} = e^{a(x-x_0)}$$

da cui e' possibile ricavare Φ

$$\Phi(x) = a \frac{1 - e^{a(x-x_0)}}{1 + e^{a(x-x_0)}} = -a \tanh\left(\frac{1}{2} a(x - x_0)\right).$$

La corrispondente ϕ_ε e'

$$\phi_\varepsilon(x) = a \frac{1 - e^{a(x-x_0)/\varepsilon}}{1 + e^{a(x-x_0)/\varepsilon}} = -a \tanh\left(\frac{1}{2\varepsilon} a(x - x_0)\right).$$

Quindi l'equazione di Burgers possiede una famiglia di soluzioni ϕ_ε tali che $\phi_\varepsilon(\pm\infty) = \mp a$ con $a > 0$. Cosa succede per $\varepsilon \rightarrow 0^+$? Ecco:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi_\varepsilon(x) = \begin{cases} a & x < x_0 \\ -a & x > x_0. \end{cases}$$

Il limite e' una funzione discontinua!

A pensarci bene, le soluzioni stazionarie non sono piu' significative delle soluzioni della forma $u = \phi(x - ct)$ con $c \in \mathbb{R}$ qualsiasi. Una funzione di questa forma si dice essere un'ONDA VIAGGIANTE (o semplicemente un'ONDA). Queste sono infatti soluzioni che si muovono con velocita' costante c e quindi si tratta di soluzioni stazionarie in un sistema di riferimento che si muove con velocita' c . Dato che tutti i riferimenti che sono uno rispetto all'altro in moto rettilineo uniforme sono indistinguibili... (invarianza galileiana), se consideriamo soluzioni stazionarie, non possiamo che considerare soluzioni della forma $u = \phi_\varepsilon(x - ct)$ con ϕ_ε e c da trovare. Con lo stesso cambio di variabili di prima: $\phi_\varepsilon(\xi) = \Phi\left(\frac{\xi}{\varepsilon}\right)$ la funzione Φ verifica

$$\left(\frac{1}{2}\Phi^2 - c\Phi\right)' = \Phi''.$$

Integrando

$$\Phi' = \frac{1}{2}(\Phi^2 - 2c\Phi - C) = \frac{1}{2}((\Phi - c)^2 - (C + c^2)) \quad C \in \mathbb{R}.$$

La funzione $\Psi := \Phi - c$ verifica

$$\Psi' = \frac{1}{2}(\Psi^2 - (C + c^2)) \quad C \in \mathbb{R},$$

cioe' la stessa equazione di prima. Le soluzioni Ψ globali sono tutte decrescenti e tendono asintoticamente per $\xi \rightarrow \pm\infty$ a $\Psi_\pm := \mp\sqrt{C + c^2}$. Di conseguenza, le soluzioni Φ (e lo stesso vale per le ϕ_ε) globali sono tutte decrescenti e tendono asintoticamente per $\xi \rightarrow \pm\infty$ a

$$\Phi_\pm := c \mp \sqrt{C + c^2}.$$

Al limite $\varepsilon \rightarrow 0^+$, si ottengono delle soluzioni discontinue che valgono, rispettivamente, Φ_- e Φ_+ a sinistra e a destra di un punto assegnato x_0 . Dalla definizione di $\Phi_\pm$ segue

$$(\Phi_\pm - c)^2 = C + c^2 \quad \Longleftrightarrow \quad C = \Phi_\pm^2 - 2c\Phi_\pm.$$

Quindi vale la relazione

$$\Phi_-^2 - 2c\Phi_- = \Phi_+^2 - 2c\Phi_+$$

che si riscrive nella forma

$$c = \frac{\Phi_- + \Phi_+}{2}.$$

Questa relazione e' nota come RELAZIONE DI RANKINE–HUGONIOT.

Ripercorrendo gli stessi passaggi per una legge di conservazione viscosa (20) con flusso f convesso, si vede che vale un risultato analogo. L'unica cosa che cambia e' la relazione di Rankine–Hugoniot che determina la relazione tra gli stati asintotici e la velocita' di propagazione dell'onda.

Provo a sintetizzare quanto ricavato fin qui.

Teorema 3.1. (versione flusso convesso) *Sia f una funzione convessa. Tutte le soluzioni globali di (20) della forma*

$$u_\varepsilon(x, t) = \phi_\varepsilon(x - ct) = \Phi\left(\frac{x - ct}{\varepsilon}\right)$$

sono monotone decrescenti e limitate.

Indicati i limiti $\Phi_\pm = \Phi(\pm\infty)$, una soluzione del tipo sopra scritto esiste se e solo se sono verificate le condizioni

$$c = \frac{f(\Phi_+) - f(\Phi_-)}{\Phi_+ - \Phi_-}, \quad \Phi_+ < \Phi_-.$$

Passare da flusso convesso a flusso generico comporta la modifica della condizione $\Phi_+ < \Phi_-$ che prende la forma della cosiddetta *condizione della corda*.

Teorema 3.2. (versione generale) *Tutte le soluzioni globali di (20) della forma*

$$u_\varepsilon(x, t) = \phi_\varepsilon(x - ct) = \Phi\left(\frac{x - ct}{\varepsilon}\right)$$

sono monotone e limitate.

Indicati i limiti $\Phi_\pm = \Phi(\pm\infty)$, una soluzione del tipo sopra scritto esiste se e solo se sono verificate le seguenti condizioni:

1. *condizione di Rankine–Hugoniot*

$$c = \frac{f(\Phi_+) - f(\Phi_-)}{\Phi_+ - \Phi_-}, \quad \Phi_+ < \Phi_-.$$

2. *condizione della corda*

$$\begin{aligned} \text{se } \Phi_+ < \Phi_-, \text{ allora } f(s) &< f(\Phi_+) + c(\Phi_+ - s) & \forall s \in (\Phi_+, \Phi_-), \\ \text{se } \Phi_- < \Phi_+, \text{ allora } f(s) &> f(\Phi_+) + c(\Phi_+ - s) & \forall s \in (\Phi_-, \Phi_+). \end{aligned}$$

I limiti per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ delle soluzioni descritte nei Teoremi 3.1–3.2 vengono dette onde di shock della legge di conservazione scalare (12).

Definizione 3.3. *Date $\Phi_\pm \in \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$ tali che valgano la condizione di Rankine–Hugoniot e la condizione della corda descritte nel Teorema 3.2, la funzione*

$$u(x, t) = \begin{cases} \Phi_-, & x - ct < x_0, \\ \Phi_+, & x - ct > x_0, \end{cases}$$

e' un'ONDA DI SHOCK della legge di conservazione (12).

Le onde di shock definiscono una classe molto specifica, ma molto interessante, di soluzioni della legge di conservazione (12) che abbiano delle discontinuita'. Ad esempio, il problema di Cauchy considerato in precedenza e la cui soluzione genera una discontinuita' al tempo $t = 1/a$, puo' essere risolto globalmente prolungando la soluzione per tempi successivi con un'onda di shock che connette i valori 1 e 0 e che, di conseguenza, propaga con velocita' $1/2$.

Un senso di insoddisfazione si impadronisce di noi. Tutto questo lavoro per un risultato ben magro: prolungare oltre il tempo di formazione della discontinuita' la soluzione di un singolo problema di Cauchy. E invece no! Quando un problema e' significativo, anche se apparentemente molto specifico, puo' essere un'indicazione fondamentale per trattare casi ben piu' generali. Molto spesso, lavori di matematica importanti e di grande impatto nella comunita' non trattano il caso piu' generale possibile, ma un esempio specifico importante. E lo trattano in maniera originale, con un punto di vista nuovo.

3.2. Soluzioni ammissibili. Le onde di shock sono interessanti come primo prototipo di soluzioni con discontinuita'. Hanno il difetto di essere troppo specifiche: si tratta di soluzioni costanti a tratti. Cio' nonostante, portano un'informazione decisiva: l'ammissibilita' di una discontinuita' e' stabilita da due condizioni. La condizione di Rankine-Hugoniot collega la velocita' di propagazione della discontinuita' con gli stati che si trovano a destra e sinistra della discontinuita', mentre la condizione della corda descrive quali stati possano essere collegati da una discontinuita'.

Ispirati da queste considerazioni, consideriamo una funzione $u : \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ limitata che sia *regolare a tratti*, nel senso seguente: esistono un numero finito di curve regolari $\gamma_j = \{x = \gamma_j(t) : t \in I_j\}$ con $I_j \subset [0, \infty)$ intervallo per cui:

1. la funzione u e' di classe $C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty) \setminus \mathcal{S})$ dove $\mathcal{S} := \cup_j \gamma_j$;
2. per ogni j , esistono finiti i limiti

$$U_j^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\gamma_j(t) \pm \varepsilon, t).$$

Diamo la seguente definizione.

Definizione 3.4. Sia f convessa. Una funzione u regolare a tratti e' una SOLUZIONE AMMISSIBILE di (12) se:

1. u verifica l'equazione in ogni $(x, t) \notin \mathcal{S}$;
2. per ogni (x, t) con $x = \gamma_j(t)$ per qualche j valgono le condizioni

$$\frac{d\gamma_j}{dt} = \frac{f(U_j^+) - f(U_j^-)}{U_j^+ - U_j^-}, \quad U_j^+ < U_j^-.$$

Ovviamente, *mutatis mutandis*, un'analogia definizione puo' essere data nel caso non convesso.

Utilizziamo il concetto di soluzioni ammissibile per risolvere un certo numero di problemi di Cauchy per l'equazione di Burgers con dati iniziali "prototipo"

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} u^2 \right) = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x).$$

ESEMPIO 1. Dati $u_r < u_\ell$, sia

$$u_0(x) := \begin{cases} u_\ell & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases}$$

Il problema e' gia' risolto: la discontinuita' e' ammissibile e propaga con velocita' c data dalla relazione di Rankine–Hugoniot $c = (u_\ell + u_r)/2$. Quindi

$$u(x, t) := \begin{cases} u_\ell & x < ct \\ u_r & x > ct \end{cases}$$

ESEMPIO 2. Dati $u_\ell < u_r$, sia

$$u_0(x) := \begin{cases} u_\ell & x < 0 \\ u_r & x > 0 \end{cases}$$

Il dato e' crescente e la soluzione si puo' determinare (piu' o meno...) con il metodo delle caratteristiche. Occorre un minimo di astuzia e considerare la funzione u_0 a piu' valori in $x = 0$, cioe' $u_0(0) = [u_\ell, u_r]$. Da $(x, t) = (0, 0)$ emerge quindi un fascio di rette lungo ciascuna delle quali la soluzione e' costante. Quindi cerchiamo soluzioni dell'equazione di Burgers di forma particolare:

$$u(x, t) = \Psi(\xi) \quad \text{dove} \quad \xi = \frac{x}{t}$$

Dato che

$$u_t = -\Psi'(\xi) x t^{-2}, \quad u_x = \Psi'(\xi) t^{-1},$$

la funzione u deve verificare

$$u_t + u u_x = -\Psi' x t^{-2} + \Psi \Psi' t^{-1} = 0,$$

ovvero $\Psi = \Psi(\xi)$ deve risolvere

$$\Psi'(\Psi - \xi) = 0,$$

Se $\Psi' \neq 0$, necessariamente deve essere $\Psi = \xi$, cioe'

$$u(x, t) = \frac{x}{t}.$$

Visto che ci siamo, osserviamo anche che anche le funzioni $(x - x_0)/(t - t_0)$ sono soluzioni della stessa equazione per ogni scelta di $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$. Ognuna di queste soluzioni (o ogni sua sottoparte) e' anche detta ONDA DI RAREFAZIONE. Notate che si tratta di una soluzione con una simmetria ben diversa rispetto a quella delle onde di shock.

Nel caso del problema di Cauchy di questo esempio, le caratteristiche prendono tutti i valori tra u_ℓ e u_r , quindi la precedente espressione da' la forma della soluzione per $x \in [u_\ell t, u_r t]$. In definitiva

$$u(x, t) := \begin{cases} u_\ell & x < u_\ell t \\ x/t & u_\ell t < x < u_r t \\ u_r & x > u_r t \end{cases}$$

ESEMPIO 3. Consideriamo ora

$$u_0(x) := \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \alpha & 0 < x < a \\ 0 & x > a \end{cases}$$

dove $\alpha, a > 0$. Per tempi piccoli, la soluzione puo' essere costruita utilizzando le soluzioni determinate nei due esempi precedenti

$$u(x, t) := \begin{cases} 0 & x < 0, \quad x > a + ct \\ x/t & 0 < x < \alpha t \\ \alpha & \alpha t < x < a + \alpha t/2 \end{cases}$$

Tutto funziona finche' l'estremo destro dell'onda di rarefazione non incontra l'onda di shock che parte da b , cioe' fintanto che

$$\alpha t < a + \frac{1}{2} \alpha t \quad \Longleftrightarrow \quad t < T := \frac{2a}{\alpha}.$$

Da T in poi, occorre riprendere in mano i conti e determinare la struttura della soluzione. Man mano che l'onda di shock entra nell'onda di rarefazione, il limite alla sua sinistra diminuisce di valore e, per la relazione di Rankine-Hugoniot, l'onda rallenta. Come determinare la forma esplicita dello shock $\gamma = \gamma(t)$ per tempi successivi a T ? Basta imporre le seguenti relazioni

$$\gamma(T) = \alpha T = 2a, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{f(U^-) - f(0)}{U^- - 0} = \frac{1}{2} U^-$$

dove $U^- = \gamma(t)/t$. In definitiva, γ e' soluzione del problema di Cauchy

$$\gamma(2a/\alpha) = 2a, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma}{2t}.$$

Separando le variabili e integrando

$$\ln \left(\frac{\gamma}{2a} \right) = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{t}{2a/\alpha} \right),$$

cioe'

$$\gamma(t) = 2a \left(\frac{t}{2a/\alpha} \right)^{1/2} = \sqrt{2\alpha a t}.$$

In definitiva, quindi,

$$u(x, t) := \begin{cases} 0 & x < 0, \quad x > a + ct \\ x/t & 0 < x < \min\{\alpha t, \bar{\gamma}(t)\} \\ \alpha & \alpha t < x < a + \alpha t/2 \end{cases}$$

dove $\bar{\gamma}$ e' la curva di shock, la cui espressione esplicita e'

$$\bar{\gamma}(t) = \begin{cases} a + \alpha t/2 & t < T = 2a/\alpha, \\ \sqrt{2\alpha a t} & t > T. \end{cases}$$

Una costruzione analoga permette di costruire la soluzione corrispondente al dato iniziale

$$u_0(x) := \begin{cases} u_1 & x < a \\ u_2 & a < x < b \\ u_3 & x > b, \end{cases}$$

con $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}$ qualsiasi .

ESEMPIO 4. Consideriamo ora una leggera variazione del problema precedente:

$$u_0(x) := \begin{cases} 0 & x < -a \\ -\alpha & -a < x < 0 \\ \beta & 0 < x < b \\ 0 & x > b \end{cases}$$

dove $\alpha, \beta, a, b > 0$.

Utilizzando la costruzione dell'esempio precedente, ci si convince che la soluzione in questo caso e'

$$u(x, t) := \begin{cases} 0 & x < \gamma_1(t), \quad x > \gamma_2(t) \\ \alpha & \gamma_1(t) < x < -\alpha t \\ x/t & \max\{\alpha t, \gamma_2(t)\} < x < \min\{\alpha t, \gamma_2(t)\} \\ \beta & \beta t < x < \gamma_2(t) \end{cases}$$

dove γ_1 e γ_2 sono due curve di shock date da

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} -a - \alpha t/2 & t < 2a/\alpha, \\ -\sqrt{2\alpha a t} & t > 2a/\alpha. \end{cases} \quad \gamma_2(t) = \begin{cases} b + \beta t/2 & t < 2b/\beta, \\ \sqrt{2\beta b t} & t > 2b/\beta. \end{cases}$$

Proprieta' importanti di questa soluzione:

1. il supporto si propaga con velocita' $\sqrt{t}$ per t sufficientemente grande;
2. per $t > \max\{2a/\alpha, 2b/\beta\}$, gli estremi superiore ed inferiore di questa funzione sono

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) = -\frac{\sqrt{2\alpha a}}{\sqrt{t}}, \quad \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x, t) = \frac{\sqrt{2\beta b}}{\sqrt{t}},$$

e, di conseguenza,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| = \frac{C}{\sqrt{t}},$$

cioe' lo stesso decadimento del nucleo del calore!

ESEMPIO 5. A voi considerare il caso

$$u_0(x) := \begin{cases} u_1 & x < -a \\ u_2 & -a < x < 0 \\ u_3 & 0 < x < b \\ u_4 & x > b \end{cases}$$

con $u_2 < u_1 < u_4 < u_3$ e $a, b > 0$.

3.3. Formulazione debole. La costruzione di soluzioni regolari a tratti e' istruttiva, perche' mostra piu' o meno esplicitamente come evolve una soluzione ammissibile di una legge di conservazione. Ha pero' il difetto di non permettere dimostrazioni generali di esistenza ed unicity globali per il problema di Cauchy

$$(24) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x)$$

con u_0 dato. Occorre, a questo scopo, introdurre un linguaggio diverso. In particolare, dato che, come abbiamo capito, siamo costretti a lavorare con funzioni poco regolari (discontinue), uno degli elementi chiave e' la generalizzazione del concetto di derivata.

Una funzione $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ continua può essere vista come una regola che associa ad ogni punto di $\mathbb{R}^n$ il valore $y = u(x) \in \mathbb{R}$. Questo è come abbiamo immaginato fin qui una funzione. È possibile però dare una descrizione diversa di questo stesso oggetto, una descrizione apparentemente più indiretta. Data u è ben definito il numero reale

$$(25) \quad \langle u, \phi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \phi(x) dx \quad \forall \phi \in \mathcal{K},$$

dove $\mathcal{K}$ è un'opportuna classe di funzioni che introdurrò tra un soffio. In questo modo, stiamo pensando la funzione u come un *funzionale* definito su $\mathcal{K}$, cioè come un'applicazione che associa a ϕ il numero reale $\langle u, \phi \rangle$. Se $\mathcal{K}$ è uno spazio vettoriale (richiesta più che ragionevole), l'espressione in (25) definisce un funzionale lineare (grazie alla linearità dell'integrale):

$$(26) \quad \langle u, \alpha\phi + \beta\psi \rangle = \alpha\langle u, \phi \rangle + \beta\langle u, \psi \rangle. \quad \forall \phi \in \mathcal{K}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

L'idea può sembrare a prima vista bizzarra e inutilmente complicata. Il grande vantaggio è che in questo modo è possibile descrivere oggetti ben più generali delle funzioni classiche e, come conseguenza, definire il concetto di *derivata debole*.

Per prima cosa definiamo con tutti i crismi chi è l'insieme $\mathcal{K}$. Ricordo prima di tutto che il supporto di una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, che si indica con $\text{supp } \phi$, è la chiusura (nella usuale topologia di $\mathbb{R}^n$) dell'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \phi(x) \neq 0\}$.

Definizione 3.5. Una funzione $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile infinite volte e con supporto compatto si chiama **FUNZIONE TEST**. L'insieme delle funzioni test si indica con $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ o con $\mathcal{D}$.

E' evidente che lo spazio $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è uno spazio vettoriale. A questa struttura vogliamo aggiungere qualcosa: una nozione di *convergenza*.

Definizione 3.6. Una successione $\phi_n \in \mathcal{D}$ è INFINITESIMA per $n \rightarrow +\infty$ se valgono le due condizioni seguenti

- (i) esiste un insieme chiuso e limitato $K \subset \mathbb{R}^n$ tale che $\text{supp } \phi_n \subset K$ per ogni n ;
- (ii) la successione ϕ_n e tutte quelle delle sue derivate (di ogni ordine) convergono a 0 uniformemente per $n \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \max_{x \in K} \left| \frac{d^k \phi_n}{dx^k}(x) \right| = 0 \quad \forall k.$$

Una successione di funzioni test ϕ_n CONVERGE ALLA FUNZIONE TEST ϕ se $\phi_n - \phi$ e' infinitesima.

La convergenza in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è estremamente forte: per successioni infinitesime, si richiede che tutte le successioni delle derivate convergano a zero e (come se non bastasse!) uniformemente.

ESERCIZIO. Sia $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $\text{supp } \psi = K$ e a_n una successione di numeri reali tale che $a_n \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$. Dimostrare che la successione $\phi_n := a_n \psi$ è infinitesima (nel senso della Definizione 3.6).

Definizione 3.7. Un'applicazione $u : C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ è un FUNZIONALE LINEARE CONTINUO o una DISTRIBUZIONE su $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se è lineare (cioè se vale (26)) e se

$$(27) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle u, \phi_n \rangle = 0 \quad \forall \phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ infinitesima.}$$

L'insieme delle distribuzioni si indica con $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ o con $\mathcal{D}'$.

Una distribuzione u e' NON NEGATIVA, e si scrive $u \geq 0$, se $\langle u, \phi \rangle \geq 0$ per ogni funzione test $\phi, \phi \geq 0$.

Non fa male notare che, nella condizione (27), $\langle u, \phi_n \rangle$ è un numero reale e quindi il limite è l'usuale limite di successioni in $\mathbb{R}$.

Sarà una forma di mania, ma ci fa sempre molto piacere introdurre una struttura sugli insiemi con cui lavoriamo. Quindi, senza originalità particolare, dotiamo $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ di una struttura di spazio vettoriale: date $u, v \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, possiamo definire la distribuzione $\alpha u + \beta v$ nell'unico modo possibile

$$\langle \alpha u + \beta v, \phi \rangle := \alpha \langle u, \phi \rangle + \beta \langle v, \phi \rangle \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Quali esempi si possono dare di distribuzioni?

Proposizione 3.8. (i) Ogni funzione continua $u \in C(\mathbb{R}^n)$ definisce una distribuzione tramite la formula (25).

(ii) Se u e v sono funzioni continue tali che $\langle u, \phi \rangle = \langle v, \phi \rangle$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, allora $u(x) = v(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Vediamo la dimostrazione nel caso unidimensionale $n = 1$.

(i) L'integrale è ben definito perchè la funzione ϕ ha supporto compatto e il prodotto di funzioni continue è continuo (e quindi integrabile). Allo stesso modo la linearità è evidente

per le proprietà dell'integrale. Si tratta di verificare la continuità. Sia $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ una successione infinitesima di funzioni test. Indicato con K l'intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$ che contiene i supporti di tutte le funzioni ϕ_n ,

$$|\langle f, \phi_n \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(x) \phi_n(x) dx \right| \leq \int_K |f(x)| |\phi_n(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \max_{x \in K} |\phi_n(x)|.$$

Per ipotesi, ϕ_n converge uniformemente a zero, cioè $\max_{x \in K} |\phi_n(x)| = 0$, quindi $\langle f, \phi_n \rangle$ tende a 0 per $n \rightarrow +\infty$.

(ii) Siano f, g due funzioni continue tali che $\langle f, \phi \rangle = \langle g, \phi \rangle$ per ogni $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora la funzione $h := f - g$ è continua e verifica

$$\langle h, \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Vogliamo dimostrare che h è la funzione nulla. Supponiamo, per assurdo, che esista $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $h(x_0) \neq 0$. Per fissare le idee, sia $h(x_0) > 0$. Dato che h è continua, esiste un intorno $I = \{x : |x - x_0| < \varepsilon\}$ tale che $h(x) > 0$ per ogni $x \in I$. Se $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è strettamente positiva in I e nulla fuori da I , si ha

$$\langle h, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} h(x) \phi(x) dx > 0,$$

che contraddice l'ipotesi. □

Questa Proposizione mostra che l'insieme delle funzioni continue può essere considerato a tutti gli effetti come un sottoinsieme delle distribuzioni $(C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$:

$$C(\mathbb{R}^n) \subset (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'.$$

L'applicazione (25), che associa ad una funzione u continua il suo rappresentante nello spazio delle distribuzioni, è lineare.

La seconda parte della Proposizione 3.8 afferma che funzioni continue diverse definiscono distribuzioni diverse. Qui l'ipotesi di continuità è indispensabile: *esistono funzioni diverse che definiscono la stessa distribuzione*. Ad esempio, ci sono funzioni non nulle che definiscono la distribuzione nulla! Com'è possibile? Semplice: la definizione (25) passa tramite la definizione integrale e, per questo motivo, non “vede” quello che succede su insiemi di misura nulla, ad esempio sui singoli punti. Quindi una funzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nulla dappertutto tranne al più in un insieme finito (anche numerabile, se volete) di punti è tale che $\langle u, \phi \rangle = 0$ per ogni funzione test ϕ . Da questo punto di vista non c'è nessuna differenza tra questa funzione e la funzione identicamente nulla.

ESEMPIO. Dato I intervallo (anche illimitato) di $\mathbb{R}$, la formula

$$\langle u, \phi \rangle := \int_I \phi(x) dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

definisce una distribuzione. La linearità è evidente. Per verificarne la continuità, consideriamo ϕ_n una successione infinitesima di funzioni test con supporti in K . Allora

$$|\langle u, \phi_n \rangle| = \left| \int_I \phi_n(x) dx \right| \leq \int_{I \cap K} |\phi_n(x)| dx \leq |K \cap I| \cdot \max_{x \in K} |\phi_n(x)|,$$

dove $|K \cap I|$ indica la misura dell'insieme $K \cap I$. La conclusione è ad un passo.

In effetti questa distribuzione è quella definita da χ_I , funzione caratteristica dell'insieme I .

ESEMPIO. Dato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definiamo

$$\langle u, \phi \rangle := \phi(x_0) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Anche questa è una distribuzione. Sulla linearità non c'è dubbio (chi ne ha, la verifichi). Anche la continuità è facile facile! Infatti, se ϕ_n è una successione infinitesima di funzioni test, in particolare $\phi_n(x_0) \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$, cioè $\langle u, \phi_n \rangle \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

La distribuzione definita in questo modo è detta DELTA DI DIRAC IN x_0 e, usualmente, si indica con δ_{x_0} :

$$(28) \quad \langle \delta_{x_0}, \phi \rangle := \phi(x_0) \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

E' possibile mostrare che *non esiste nessuna funzione integrabile che rappresenti la delta di Dirac*. In definitiva: la delta di Dirac è la prima vera distribuzione che incontriamo e che non sia, in realtà, una funzione.

Ispirandosi al fatto che alcune funzioni definiscono delle corrispondenti distribuzioni attraverso la solita formula (25), si possono introdurre definizioni ulteriori per le distribuzioni in generale. In particolare, e' possibile estendere il concetto di derivata.

Infatti, supponiamo che la funzione u sia di classe C^1 , allora, grazie alla formula di integrazione per parti,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) \phi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} u(x) \frac{\partial \phi}{\partial x_j}(x) dx,$$

che, in termini di distribuzioni si legge come segue:

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \phi \right\rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle.$$

L'espressione a secondo membro ha senso (come distribuzione) anche se la funzione u non e' derivabile. Quindi tanto vale definire la derivata distribuzionale attraverso questa formula anche nel caso di distribuzioni in generale.

Definizione 3.9. Data $u \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^n))'$, si definisce DERIVATA PARZIALE DEBOLE (o DISTRIBUZIONALE) DI u RISPETTO A x_j la distribuzione $D_{x_j}u$ definita da

$$(29) \quad \langle D_{x_j}u, \phi \rangle = - \left\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle. \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Grazie alla formula (29), *qualsiasi distribuzione ammette derivate distribuzionali di qualsiasi ordine*. Per determinare le derivate successive, basta iterare il procedimento. (l'aver considerato funzioni test infinitamente derivabili permette di derivare quante volte si vuole).

ESEMPIO. Consideriamo la FUNZIONE DI HEAVISIDE

$$(30) \quad H(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Questa funzione definisce una distribuzione quindi ammette derivate distribuzionali di ogni ordine pur non essendo una funzione derivabile in senso classico in $x = 0$. Vediamo di capire chi è la derivata distribuzionale di H . Dalla definizione, se ϕ è una funzione test,

$$\langle H', \phi \rangle := -\langle H, \phi'(x) \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H(x) \phi'(x) dx = -\int_0^{+\infty} \phi'(x) dx = \phi(0).$$

Quindi, la derivata prima è la delta di Dirac concentrata in 0: $H' = \delta_0$.

ESERCIZIO Sia

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & x < x_0, \\ g(x) & x \geq x_0. \end{cases}$$

con $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Dimostrare che la derivata distribuzionale di F è

$$D_x F = [F(x_0+) - F(x_0-)] \delta_{x_0} + \frac{dF}{dx} \quad \text{dove} \quad \frac{dF}{dx}(x) := \begin{cases} f'(x) & x < x_0, \\ g'(x) & x > x_0. \end{cases}$$

Esempio 3.10. Sia $u = u(x, y)$ una funzione da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$ tale che esiste una curva $\gamma = \{x = \gamma(y) : y \in \mathbb{R}\}$ per cui:

1. $u \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \gamma)$;
2. u è continua in $\Omega_- := \{(x, y) : x \leq \gamma(y)\}$ e in $\Omega_+ := \{(x, y) : x \geq \gamma(y)\}$.

Quanto valgono le derivate distribuzionali di u rispetto ad x e rispetto a y ? Partiamo dalla derivata distribuzionale rispetto ad y . Sia ϕ una funzione test con supporto contenuto nel rettangolo $R := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Supponiamo che valga

$$(31) \quad x_1 \leq \gamma(y) \leq x_2 \quad \forall y \in [y_1, y_2].$$

Gli altri casi si possono trattare in maniera analoga. Per definizione

$$\langle D_x u, \phi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial x} \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = -\int_{\Omega_-} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy - \int_{\Omega_+} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy.$$

Dato che

$$\int_{\Omega_{\pm}} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \int_{\Omega_{\pm}} \frac{\partial(u\phi)}{\partial x} dx dy - \int_{\Omega_{\pm}} \frac{\partial u}{\partial x} \phi dx dy,$$

applicando le formule di Green, si ottiene

$$\int_{\Omega_{\pm}} u \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \mp \int_{y_1}^{y_2} u(\gamma(y) \pm, y) \phi(y) dy - \int_{\Omega_{\pm}} \frac{\partial u}{\partial x} \phi dx dy.$$

(la presenza del segno $\pm$ di fronte all'integrale lungo la curva γ è conseguenza del senso di percorrenza dell'integrale curvilineo). Quindi

$$\langle D_x u, \phi \rangle = \int_{y_1}^{y_2} [u](\gamma(y), y) \phi(y) dy + \langle \frac{\partial u}{\partial x}, \phi \rangle = \int_{\gamma^+} [u] \phi dy + \langle \frac{\partial u}{\partial x}, \phi \rangle$$

dove $[u]$ indica il SALTO DELLA FUNZIONE u , cioè

$$[u](\gamma(y), y) := u(\gamma(y)+, y) - u(\gamma(y)-, y).$$

Come si vede, se la funzione u è continua, la distribuzione $D_x u$ coincide con la funzione $\partial u / \partial x$, derivata classica di u fuori da γ . Se u , invece, è discontinua, compare un contributo aggiuntivo, che consiste in un integrale curvilineo lungo la curva di discontinuità.

Passiamo dalla derivata distribuzionale rispetto ad y . Come prima, sia ϕ una funzione test con supporto contenuto nel rettangolo $R := [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ e supponiamo valida (31). Per definizione

$$\langle D_y u, \phi \rangle = -\langle u, \frac{\partial \phi}{\partial y} \rangle = -\int_{\mathbb{R}^2} u \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = -\int_{\Omega_-} u \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy - \int_{\Omega_+} u \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy.$$

Applicando le formule di Green, si ottiene

$$\int_{\Omega_{\pm}} u \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = \pm \int_{y_1}^{y_2} u(\gamma(y) \pm, y) \phi(y) \gamma'(y) dy - \int_{\Omega_{\pm}} \frac{\partial u}{\partial y} \phi dx dy.$$

Quindi

$$\langle D_y u, \phi \rangle = -\int_{y_1}^{y_2} [u](\gamma(y), y) \phi(y) \gamma'(y) dy + \langle \frac{\partial u}{\partial y}, \phi \rangle = -\int_{\gamma^+} [u] \phi dx + \langle \frac{\partial u}{\partial y}, \phi \rangle$$

ESERCIZIO. Sia u una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con derivata distribuzionale nulla: $\langle u', \phi \rangle = 0$ per ogni funzione test ϕ . Si può affermare che esiste $C \in \mathbb{R}$ tale che $u(x) = C$ per ogni $x \in \mathbb{R}$?

Grazie alla definizione di derivata debole è possibile dare una definizione generalizzata di soluzione di una legge di conservazione che, in particolare, permette di lavorare con funzioni discontinue.

Definizione 3.11. Una funzione $u = u(x, t)$ è SOLUZIONE DEBOLE (o DISTRIBUZIONALE) della legge di conservazione

$$(32) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0,$$

nella regione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se tale relazione è verificata nel senso delle distribuzioni per ogni funzione test con supporto in Ω , cioè se vale

$$(33) \quad \langle D_t u + D_x f(u), \phi \rangle = 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \phi \subset \Omega,$$

cioè, esplicitamente,

$$(34) \quad \int_{\mathbb{R}^2} \left\{ u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} dx dt \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \phi \subset \Omega.$$

Nel caso di una funzione regolare a tratti come nell'Esempio 3.10,

$$\langle D_t u + D_x f(u), \phi \rangle = \int_{\gamma^+} \phi (-[u] dx + [f(u)] dt) + \langle \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x}, \phi \rangle.$$

Quindi u e' soluzione debole se e solo se verifica l'equazione in senso classico fuori da γ e soddisfa la condizione di Rankine–Hugoniot lungo le discontinuita':

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Rispetto alla condizione di ammissibilita' dedotta in maniera euristica nella precedente Sezione manca qualcosa... la condizione di salto!

3.4. Entropie. Se u e' soluzione classica della legge di conservazione, allora e' possibile scrivere molte altre equazioni che sono soddisfatte. Infatti, se η e' una funzione regolare, moltiplicando la legge di conservazione per $\eta'(u)$, si ottiene

$$\eta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \eta'(u) f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

e cioe'

$$(35) \quad \frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = 0, \quad \text{dove} \quad q(u) = \int^u \eta'(s) f'(s) ds.$$

Ma nel caso della formulazione debole? E' ancora vero che se u e' soluzione debole, allora vale anche l'equazione (35) in senso debole? La risposta e' NO! Infatti, *per le derivate distribuzionali non vale la formula di derivazione del prodotto*. Ecco un esempio subito subito. Se $u = u(x)$ definita da

$$u(x) = \begin{cases} -1 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

allora, dato che $u^2 = 1$ e $u^3 = u$,

$$D_x(u^3) = 2\delta_0, \quad 3u^2 D_x u = 6\delta_0$$

che sono distribuzioni ben diverse!

Cosa succede nel caso di soluzioni deboli? Ovvero, cosa succede nel momento in cui si creano delle discontinuita' nella soluzione? Torniamo al punto di vista della viscosita'. Consideriamo cioe' una soluzione approssimata data introducendo nell'equazione un termine di viscosita':

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

La soluzione di questa equazione e' regolare per ogni tempo, quindi e' possibile moltiplicare per $\eta'(u)$ e usare la regola di derivazione del prodotto senza problemi. Ecco cosa succede

$$\eta'(u) \frac{\partial u}{\partial t} + \eta'(u) f'(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon \eta'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

e cioe', se la funzione η e' convessa,

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \varepsilon \eta''(u) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \leq \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta'(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

Formalmente, per $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x} \leq 0.$$

Nel limite, pero', sappiamo gia' che la soluzioni potrebbe essere poco regolare. Quindi e' sensato considerare la precedente relazione valida, anziche' in senso classico, in senso debole. Da qui la seguente definizione

Definizione 3.12. *Una funzione $u = u(x, t)$ e' SOLUZIONE ENTROPICA della legge di conservazione (3.11) nella regione $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ se per ogni entropia $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convessa, vale*

$$(36) \quad \langle D_t \eta(u) + D_x q(u), \phi \rangle \leq 0 \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \text{supp } \phi \subset \Omega, \quad \phi \geq 0,$$

dove q , detto flusso d'entropia, e' tale che $q' = \eta', f'$.

Ogni soluzione entropica e' anche soluzione debole. Infatti scegliendo $\eta(s) = \pm s$, si ottiene $\pm \langle D_t u + D_x f(u), \phi \rangle \leq 0$ cioe' $\pm \langle D_t u + D_x f(u), \phi \rangle = 0$.

Come si traduce la condizione di entropia (36) nel caso di soluzioni regolari a tratti? Grazie alle espressioni note per le derivate distribuzionali di funzioni regolari a tratti

$$\langle D_t \eta(u) + D_x q(u), \phi \rangle = \int_{\gamma^+} \phi ([\eta(u)] dt - [q(u)] dx) + \langle \frac{\partial \eta(u)}{\partial t} + \frac{\partial q(u)}{\partial x}, \phi \rangle.$$

Fuori dalla curva di discontinuita' γ , la soluzione e' regolare, e' possibile applicare la derivata di funzione composta e, di conseguenza, l'ultimo termine e' nullo. Quindi la condizione di entropia (36) e' verificata se e solo se

$$\int_{\gamma^+} \phi (-[\eta(u)] dx + [q(u)] dt) \leq 0$$

per ogni funzione test ϕ , $\phi \geq 0$, cioe' se e solo se

$$(37) \quad -[\eta(u)] dx + [q(u)] dt \leq 0$$

Dato che deve essere soddisfatta la condizione di Rankine-Hugoniot, la precedente relazione e' verificata se e solo se

$$[q(u)] \leq \frac{[\eta(u)] [f(u)]}{[u]}.$$

E ora il passo finale... tradurre questa condizione nella condizione di salto gia' vista.

Scelgo una famiglia di entropie particolari: le ENTROPIE DI KRUŽKOV η_k con il corrispondente flusso di entropia q_k

$$\eta_k(u) := |u - k|, \quad q_k(u) := \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)) \quad k \in \mathbb{R}.$$

Se u_ℓ e u_r sono i limiti destro e sinistro della soluzione sulla discontinuita', la condizione (37) diviene

$$\text{sgn}(u_r - k)(f(u_r) - f(k)) - \text{sgn}(u_\ell - k)(f(u_\ell) - f(k)) \leq \frac{(|u_r - k| - |u_\ell - k|)(f(u_r) - f(u_\ell))}{u_r - u_\ell}.$$

Supponiamo $u_r < u_\ell$ e consideriamo $k \in (u_r, u_\ell)$. La precedente relazione diviene

$$2f(k) - f(u_r) - f(u_\ell) \leq \frac{(2k - u_r - u_\ell)(f(u_r) - f(u_\ell))}{u_r - u_\ell}.$$

Dato che $2k - u_r - u_\ell = 2(k - u_\ell) - (u_r - u_\ell)$,

$$2f(k) - f(u_r) - f(u_\ell) \leq 2 \frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell} (k - u_\ell) - f(u_r) + f(u_\ell)$$

ovvero

$$f(k) \leq \frac{f(u_r) - f(u_\ell)}{u_r - u_\ell} (k - u_\ell) + f(u_\ell).$$

che e' esattamente la condizione di salto vista nella Sezione precedente.

Conti analoghi mostrano che anche nel caso $u_\ell < u_r$, si arriva alla condizione della corda.

Nell'ambito della formulazione entropica e' possibile far vedere che il problema di Cauchy per le leggi di conservazione e' ben posto, nel senso che ammette un'unica soluzione, definita per ogni tempo e che dipende in maniera continua dai dati iniziali. Per i dettagli fate riferimento a qualche testo tra quelli citati in bibliografia.

4. SOLUZIONI

Soluzione dell'Esercizio 1.1. Qui uso questa notazione: dati i vettori colonna $w_1, \dots, w_n$, il determinante della matrice W composta da tali vettori e' $\det W = w_1 \wedge \dots \wedge w_n$. Se $w_j = w_j(t)$ e' facile convincersi della validita' della formula di derivazione seguente

$$(38) \quad \frac{dW}{dt} = \frac{dw_1}{dt} \wedge \dots \wedge w_n + \dots + w_1 \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{dt}.$$

Se $\phi(x, t) = (\phi_1(x, t), \dots, \phi_n(x, t))$, allora

$$J = \det(\nabla_x \phi_1 \dots \nabla_x \phi_n) = \nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \nabla_x \phi_n.$$

Di conseguenza, utilizzando (38),

$$\frac{\partial J}{\partial t}(x, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \nabla_x \phi_n \right) + \dots + \left(\nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \phi_n \right).$$

Dato che

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla_x \phi_i = \nabla_x \frac{\partial \phi_i}{\partial t} = \nabla_x v_i(\phi(x, t), t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \phi_k} \nabla_x \phi_k,$$

e ricordando le proprieta' dei determinanti, si ha

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t}(x, t) &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial v_1}{\partial \phi_k} \nabla_x \phi_k \wedge \dots \wedge \nabla_x \phi_n \right) + \dots + \left(\nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_n}{\partial \phi_k} \nabla_x \phi_k \right) \\ &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial \phi_1} \nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \nabla_x \phi_n \right) + \dots + \left(\nabla_x \phi_1 \wedge \dots \wedge \frac{\partial v_n}{\partial \phi_n} \nabla_x \phi_n \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial \phi_1} (\nabla_x \phi_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_x \phi_n) + \cdots + \frac{\partial v_n}{\partial \phi_n} (\nabla_x \phi_1 \wedge \cdots \wedge \nabla_x \phi_n) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial \phi_k} J,$$

che restituisce proprio la relazione (3). $\square$

REFERENCES

- [1] A. Bressan, "Hyperbolic systems of conservation laws. The one-dimensional Cauchy problem", Oxford lecture series in mathematics and its applications, 20, Oxford University Press, 2000.
- [2] A.J. Chorin, J.E. Marsden, "A mathematical introduction to fluid mechanics", 3rd ed., Texts in applied mathematics, 4, Springer-Verlag, 1993.
- [3] R. Courant, K.O. Friedrichs, "Supersonic flow and shock waves", Applied mathematical sciences, 21, Springer-Verlag, 1976.
- [4] C.M. Dafermos, "Hyperbolic conservation laws in continuum physics", Fundamental Principles of Mathematical Sciences, 325, Springer-Verlag, Berlin, 2000.
- [5] L.C. Evans, "Partial Differential Equations", Graduate Studies in Mathematics, 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [6] M. Fabrizio, "Introduzione alla meccanica razionale e i suoi metodi matematici", seconda ed., Zanichelli, 1994.
- [7] D. Serre, "Systems of conservation laws", 2 voll., Cambridge University Press, Cambridge, 2000.