Programma di Analisi Matematica 1 (Versione preliminare)

A.A. 2023-2024 (Prof. Fabio ANCONA)

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale (Canale A)

1. I numeri ed i concetti generali sulle funzioni numeriche *(11 ore)*

Elementi della teoria degli insiemi. Insiemi numerici. I numeri naturali $\mathbb{N}$, i numeri interi $\mathbb{Z}$, i numeri razionali $\mathbb{Q}$ ed i numeri reali $\mathbb{R}$. Irrazionalità di $\sqrt{2}$. Densità dei numeri razionali nell'insieme dei numeri reali. Rappresentazione decimale dei numeri reali. Ordinamento totale dell'insieme dei numeri reali e compatibilità dell'ordine con le operazioni algebriche. Archimedeità dei numeri reali. Valore assoluto, o modulo, di un numero reale. Disuguaglianza triangolare. Equazioni e disequazioni con i valori assoluti. Disequazioni di secondo grado e razionali. Principio di induzione e diseguaglianza di Bernoulli. Definizione di intervallo (limitato e illimitato) della retta reale e sua caratterizzazione. Massimo, minimo. estremo superiore ed inferiore di un insieme. Completezza di $\mathbb{R}$. Radici, potenze, logaritmi. Generalità sulle funzioni reali di una variabile reale: dominio, immagine, grafico. Funzioni limitate, monotone, simmetriche (pari e dispari), periodiche. Composizione di funzioni, funzione identità, funzioni iniettive, funzione inversa. Invertibilità delle funzioni strettamente monotone. Definizione e proprietà delle funzioni elementari: funzioni potenza con esponente intero e reale (radici n-sime di un numero reale non negativo), funzioni esponenziali e logaritmiche, funzioni iperboliche (e loro funzioni inverse), funzioni trigonometriche (e loro funzioni inverse). Disequazioni irrazionali, esponenziali, logaritmiche e trigonometriche.

2. Funzioni di una variabile reale I: limiti *(12 ore)*

Intorni di un punto. Definizione di punto di accumulazione e punto isolato. Definizione di limite (finito ed infinito) di una funzione in un punto ed all'infinito. Unicità del limite. Limiti unilateri: destri e sinistri. Cambio di variabile nel calcolo del limite (limite della funzione composta). Comportamento dell'operazione di limite di una funzione rispetto all'ordinamento di $\mathbb{R}$: teorema di permanenza del segno e teorema del confronto per funzioni. Operazioni algebriche (somme, differenze, prodotti e quozienti) con i limiti finiti di funzioni ed estensione di questi risultati ai limiti infiniti. Forme di indeterminazione. Esistenza del limite per funzioni monotone. Tecniche di calcolo dei limiti. Limiti notevoli: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x$, $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$ ed altri limiti notevoli riguardanti funzioni potenza, esponenziali, logaritmiche e trigonometriche. Confronto tra diversi infiniti ed infinitesimi (simbolo di Landau $o(\cdot)$ di "o piccolo"). La gerarchia degli infiniti (logaritmi, potenze, esponenziali) e degli infinitesimi. Utillizzo degli sviluppi asintotici per il calcolo dei limiti. Definizione di asintoto orizzontale, verticale ed obliquo.

3. Funzioni di una variabile reale II: continuità *(5 ore)*

Definizione di continuità di una funzione in un punto del suo dominio. Definizione di continuità di una funzione a sinistra ed a destra di un punto del suo dominio. Punti di discontinuità: discontinuità eliminabili ed estensioni continue, discontinuità di salto (o di prima specie), discontinuità infinite e discontinuità che non ammettono valori limite a sinistra ed a destra. Esempi di funzioni continue e discontinue. Continuità di una funzione in un intervallo. Teorema dei valori intermedi e teorema di Bolzano (o degli zeri) per funzioni continue su un intervallo. Immagine di una funzione continua definita su un intervallo. Continuità della funzione inversa di una funzione continua, strettamente monotona, definita su un intervallo. Continuità della funzione composta. Continuità delle combinazioni algebriche (somme, differenze, prodotti e quozienti) di funzioni continue. Continuità delle funzioni elementari nel loro dominio di definizione. Definizione di punto di massimo e di minimo assoluto per una funzione. Insiemi compatti. Teorema di Weierstrass sui massimi e minimi di funzioni continue definite su un intervallo chiuso e limitato. Teorema di Weierstrass sull'immagine di una funzione continua definita su un compatto.

4. Successioni numeriche *(6 ore)*

Sucessioni di numeri reali: definizione di limite, unicità del limite. Successioni convergenti, divergenti ed irregolari. Successioni di Cauchy (o fondamentali). Successioni convergenti sono limitate e di Cauchy. Criterio di Cauchy. Caratterizzazione del limitie di una successione tramite il limite di sottosuccessioni. Teorema di Bolzano-Weierstrass per successioni. Caratterizzazione del limite di una funzione e della continuità in un punto tramite i limiti di successioni. Comportamento dell'operazione di limite di una successione rispetto all'ordinamento di $\mathbb{R}$: teorema di permanenza del segno e teorema del confronto per successioni. Proprietà algebriche dei limiti finiti di successioni (somme, differenze, prodotti, quozienti) ed estensione di questi risultati ai limiti infiniti. Forme di indeterminazione. Esistenza del limite di una successione monotona. Il numero di Nepero e definito come limite di una successione. Confronto tra diversi infiniti ed infinitesimi. La gerarchia degli infiniti (logaritmi, potenze, esponenziali, fattoriale) e degli infinitesimi.

5. Serie numeriche *(7 ore)*

Somme parziali (o ridotte) n-sime, somma di una serie. Serie regolari e serie oscillanti. Serie geometrica. Condizione necessaria per la convergenza di una serie è che il termine generale n-simo tenda a zero; serie armonica è divergente. Criterio di Cauchy per la conevergenza di una serie. Serie a termini non negativi; criterio del confronto e del confronto asintotico; criterio del rapporto e del rapporto asintotico; criterio della radice e della radice asintotico; criterio di condensazione; serie armonica generalizzata. Serie a termini di segno variabile, criterio di Leibniz. Convergenza assoluta di una serie; la convergenza assoluta implica la convergenza semplice di una serie.

6. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale I: derivabilità e proprietà delle funzioni derivabili, ricerca degli estremi *(15 ore)*

Definizione di derivata di una funzione. Esempi. Retta tangente al grafico di una funzione. Approssimazione lineare di una funzione. La derivabilità di una funzione in un punto implica la continuità della funzione nel punto, ma non vale il viceversa (esempi). Regole di derivazione delle funzioni elementari. Derivate di ordine superiore. Derivata destra e sinistra. Studio dei punti singolari (di non derivabilità): punti angolosi, di cuspide, punti di flesso a tangente verticale. Calcolo delle derivate di somme, prodotti e quozienti di funzioni derivabili. Derivata della funzione composta (regola della catena). Derivata della funzione inversa. Definizione di punto di massimo e di minimo relativo per una funzione. Definizione di punto stazionario (o critico). Uso delle derivate per la ricerca dei massimi e minimi di una funzione: Teorema di Fermat. Teorema di Rolle. Teorema di Lagrange (o del valor medio), Teorema di Cauchy (o del valor medio generalizzato). Teorema del limite della derivata. Caratterizzazione delle funzioni monotone e derivabili su intervalli tramite il segno della loro derivata. Le funzioni con derivata nulla su un intervallo sono tutte e sole le costanti. Teorema di de l'Hôpital e suo utilizzo per il calcolo di limiti con forme di indeterminazione non risolubili mediante i limiti notevoli.

7. Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale II: derivate di ordine superiore e approssimazioni lineari *(8 ore)*

Definizione di funzione concava e convessa "per corde" su un intervallo. Proprietà delle funzioni concave e convesse nei punti di derivabilità. Caratterizzazione delle funzioni concave e convesse due volte derivabili tramite il segno della loro derivata seconda. Flessi: definizione e utilizzo della derivata seconda per la loro ricerca. Uso delle derivate prima e seconda per lo studio del grafico di una funzione. Approssimazione quadratica di una funzione. Formula di Taylor del secondo ordine col resto secondo Peano. Estensione della formula di Taylor col resto secondo Peano all'ordine n. Applicazioni della formula di Taylor col resto secondo Peano al calcolo dei limiti. Formula di Taylor di ordine n col resto secondo Lagrange. Serie di Taylor e sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor. Condizioni sufficienti per la sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor.

8. Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale I: l'integrale secondo Riemann, la funzione primitiva e i teoremi fondamentali del calcolo *(12 ore)*

Definizione di integrale di Cauchy-Riemann per funzioni limitate definite su intervalli chiusi e limitati. Integrabilità secondo Cauchy-Riemann di funzioni continue a tratti (con un numero finito di discontinuità eliminabili o di prima specie) e di funzioni monotone definite su intervalli chiusi e limitati. Proprietà fondamentali dell'integrale: additività rispetto all'intervallo di integrazione, linearità e monotonia rispetto alla funzione integranda. Teorema della media integrale. Definizione di primitiva e di integrale indefinito di una funzione definita su un intervallo. L'esistenza di una primitiva di una funzione su un intervallo implica che la funzione ammette infinite primitive (su quell'intervallo) che differiscono tra loro per una costante. Primo teorema fondamentale del calcolo integrale (che permette di calcolare un integrale definito mediante una primitiva della funzione integranda). Definizione di funzione integrale. Continuità della funzione integrale. Secondo teorema fondamentale del calcolo integrale (derivabilità della funzione integrale).

9. Calcolo integrale per funzioni di una variabile reale II: metodi di integrazione e integrali impropri *(10 ore)*

Metodi di calcolo per integrali definiti e indefiniti. Primitive delle funzioni elementari. Integrazione per mezzo di un cambiamento di variabile (metodo di sostituzione), ed integrazione per parti. Tecniche di calcolo dell'integrale di alcune classi di funzioni razionali, irrazionali e trigonometriche. Definizione di integrale improprio (o generalizzato) per funzioni definite su intervalli limitati, non chiusi, e su intervalli illimitati. Integrabilità delle funzioni potenza. Criteri di integrabilità: criterio del confronto e del confronto asintotico.

10. Equazioni differenziali del primo e secondo ordine lineari ed a variabili separabili *(10 ore)*

Equazioni differenziali lineari del primo ordine: equazione omogenea, equazione completa. Metodo di soluzione di un'equazione differenziale lineare del primo ordine (omogenea e non omogenea). Problema di Cauchy per un'equazione differenziale del primo ordine. Equazioni differenziali (non lineari) a variabili separabili: metodo di determinazione della soluzione di un problema di Cauchy. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine: equazione omogenea, Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti; Metodo per la determinazione dell'integrale generale di un'equazione omogenea del secondo ordine a coefficienti costanti; metodo di somiglianza per la determinazione di un integrale particolare di un'equazione non omogenea a coefficienti costanti con termine noto di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico.

Testi di riferimento

[1] A. Marson, P. Baiti, F. Ancona, B. Rubino: *Analisi Matematica 1, Teoria e applicazioni*, Ed. Carocci, 2010.

[2] S. Salsa & A. Squellati: *Esercizi di Analisi Matematica 1*, Ed. Zanichelli, 2011.

[3] M. Bramanti: *Esercitazioni di Analisi Matematica 1*, Ed. Esculapio, 2011.

Altri testi consigliati

[4] M. Bramanti: *PreCalculus*, Ed. Progetto Leonardo, 1999.

[5] A. Marson: *Temi d'esame di Analisi Matematica 1*, stampato presso Cusl Nuova Vita, Padova, 2011.