Programma di Fondamenti di Analisi Matematica 2

A.A. 2018-2019 (Prof. Fabio ANCONA)

Corso di Laurea in Ingegneria Aerospaziale

1. Elementi di base del calcolo infinitesimale in più variabili

Vettori, punti e insiemi del piano e dello spazio. Prodotto scalare e vettoriale. Intorno di un punto. Insiemi aperti e chiusi. Frontiera, chiusura ed interno di un insieme. Superfici quadriche.

2. Curve parametriche e integrali curvilinei di funzioni scalari

Curve continue in forma parametrica; equazione e traiettoria (o sostegno) della curva. Curve parametriche chiuse, semplici. Cambiamento di parametrizzazione; curve parametriche equivalenti. Orientamento di una curva parametrica semplice. Alcune curve fondamentali: l'ellisse, la cicloide, l'astroide, la spirale di Archimede. Coordinate polari nel piano. Derivata di una funzione vettoriale di una singola variabile reale. Vettore tangente alla traiettoria di una curva in un punto regolare. Curve parametriche regolari (o lisce). Retta tangente ad una curva in un punto regolare. Vettore normale e retta normale ad una curva in un punto regolare. Lunghezza di una curva parametrica di classe $\mathcal{C}^1$ a tratti. Ascissa curvilinea (o lunghezza d'arco). Invarianza della lunghezza di una curva parametrica regolare rispetto a cambiamenti di parametrizzazione regolari. Integrale di linea (o curvilineo di prima specie) rispetto alla lunghezza d'arco di una funzione scalare continua lungo una curva parametrica regolare: definizione e proprietà. Invarianza dell'integrale curvilineo lungo una curva parametrica regolare rispetto a cambiamenti di parametrizzazione regolari. Esempi: massa, baricentro di un filo materiale di densità lineare assegnata.

3. Funzioni scalari di più variabili

Grafico cartesiano, curve e superfici di livello di una funzione scalare di più variabili reali. Limiti e continuità di funzioni di più variabili reali: definizioni e proprietà. Analisi del limite tramite trasformazione in coordinate polari. Insiemi limitati e compatti. Teorema di Weierstrass sull'immagine di un insieme compatto tramite una funzione continua. Insiemi connessi (per archi). Immagine tramite una funzione continua di un insieme connesso è un intervallo.

4. Calcolo differenziale per funzioni di più variabili

Derivate parziali e gradiente di una funzione scalare di più variabili reali. Derivate parziali di ordine superiore di una funzione scalare di più variabili reali; matrice Hessiana. Teorema di Schwarz. Piano tangente a una superficie grafico cartesiano di una funzione scalare di due variabili reali. Differenziabilità e differenziale di una funzione scalare di più variabili reali. La differenziabilità di una funzione in un punto implica la continuità. Funzioni di classe $\mathcal{C}^1$ sono differenziabili. Derivate direzionali. Differenziabilità e derivabilità: formula del gradiente. Proprietà del gradiente: il gradiente é la direzione di massima variazione della funzione; ortogonalità del gradiente di una funzione agli insiemi di livello della funzione. Funzioni con gradiente nullo su aperti connessi sono costanti. Derivazione della funzione composta. Punti estremanti locali (o relativi): massimi e minimi locali (o relativi). Punti critici (o stazionari) interni. Punti di sella (o di colle). Funzioni continue definite su insiemi chiusi e limitati ammettono estremi assoluti. Condizione necessaria del prim'ordine per l'esistenza di punti estremanti interni (Teorema di Fermat). Differenziale secondo di una funzione scalare di due variabili reali. Formula di Taylor del secondo ordine con resto secondo Peano per funzioni scalari di due variabili reali. Forme quadratiche; segno di una forma quadratica. Classificazione di una forma quadratica in due variabili tramite il segno dei minori principali della matrice associata o tramite il segno dei suoi autovalori. Condizione sufficiente del secondo ordine affinchè un punto interno critico sia estremante locale. Derivate parziali e matrice Jacobiana di una funzione vettoriale di più variabili reali. Matrice Jacobiana della funzione composta e della funzione inversa.

5. Ottimizzazione: Estremi vincolati

Punti estremanti locali vincolati su una curva o su una superficie. Punti critici condizionati su una curva o su una superficie. Il gradiente di una funzione f in un punto critico x_0 di f vincolato su una curva (o superficie) Γ appartiene allo spazio normale alla curva (o superficie) Γ nel punto x_0. Condizione necessaria affinchè un punto di una curva o superficie definita in forma implicita sia estremante locale per una funzione definita sulla curva o sulla superficie (metodo dei moltiplicatori di Lagrange).

6. Superfici parametriche

Superfici continue di $\mathbb{R}^3$ in forma parametrica; equazione della superficie. Curve (o linee) coordinate; vettori tangenti alle curve coordinate. Superfici parametriche regolari; esempi di superfici parametriche regolari: grafico cartesiano di una funzione $f(x, y)$ di classe $\mathcal{C}^1$; superfici di rotazione. Piano tangente in un punto ad una superficie parametrica regolare ed equazione del piano tangente; equazione del piano tangente ad una superficie grafico cartesiano di una funzione $f(x, y)$. Versore normale ad una superficie parametrica regolare.

7. Campi vettoriali

Lavoro di un campo vettoriale continuo lungo una curva parametrica regolare orientata (integrale curvilineo di seconda specie); invarianza del lavoro di un campo vettoriale lungo una curva parametrica rispetto a cambiamenti di parametrizzazione regolari che conservano l'orientamento. Campo vettoriale conservativo e potenziale di un campo conservativo. Il lavoro di un campo vettoriale conservativo lungo una curva regolare orientata dipende solamente dagli estremi della curva e non dalla sua particolare traiettoria. Caratterizzazione di un campo conservativo tramite il lavoro del campo lungo curve regolari aventi la stessa origine e lo stesso estremo; e lungo curve regolari chiuse. Condizione necessaria affinchè un campo vettoriale di classe $\mathcal{C}^1$ sia conservativo è che sia irrotazionale. Insiemi semplicemente connessi. Condizione sufficiente affinchè un campo vettoriale irrotazionale di classe $\mathcal{C}^1$ sia conservativo è che il dominio sia semplicemente connesso. Ricerca del potenziale di un campo conservativo per integrazione indefinita e per integrazione lungo spezzate con i lati paralleli agli assi (se definito su un rettangolo di $\mathbb{R}^2$ o su un parallelepipedo di $\mathbb{R}^3$).

8. Integrale multiplo (secondo Riemann)

Integrabilità secondo Riemann di funzioni scalari definite su rettangoli di $\mathbb{R}^2$, o su parallelepipedi di $\mathbb{R}^3$, e su domini limitati di $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. continue, definite su domini normali o su domini regolari (unioni finite di domini normali) di $\mathbb{R}^2$, e su parallelepipedi di $\mathbb{R}^3$. Proprietà dell'integrale: linearità, monotonia, additività rispetto al dominio di integrazione, teorema della media integrale. Formule di riduzione per integrali doppi di funzioni integrabili definite su rettangoli o su domini normali di $\mathbb{R}^2$; formule di riduzione per integrali tripli di funzioni integrabili definite su parallelepipedi (integrazione per fili e per strati) o su domini normali di $\mathbb{R}^3$, volume di solidi di rotazione. Cambiamento delle variabili di integrazione negli integrali doppi e tripli; trasformazione in coordinate polari ed ellittiche nel piano; trasformazione in coordinate cilindriche e sferiche (o polari) nello spazio.

9. Integrali superficiali

Elemento d'area infinitesimo di una superficie parametrica regolare; area di una superficie parametrica regolare. Integrale superficiale di una funzione scalare continua su una superficie parametrica regolare. Flusso di un campo vettoriale continuo attraverso una superficie parametrica regolare orientata. Invarianza dell'integrale superficiale di una funzione scalare su una superficie parametrica regolare rispetto a cambiamenti di parametrizzazione regolari; invarianza del flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie parametrica regolare orientata rispetto a cambiamenti di parametrizzazione regolari che conservano l'orientamento. Teorema della divergenza su parallelepipedi di $\mathbb{R}^3$; teorema della divergenza su domini limitati connessi di $\mathbb{R}^3$ aventi per frontiera una superficie parametrica regolare (o regolare a pezzi), chiusa, orientabile.

10. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine

Proprietà dell'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine. Spazio delle soluzioni ed integrale generale di un'equazione differenziale lineare omogenea. Matrice wronskiana e wronskiano (o determinante wronskiano) di due soluzioni; proprietà del wronskiano. L'integrale generale di un'equazione differenziale lineare non omogenea è la somma dell'integrale generale dell'equazione omogenea associata e di una soluzione particolare dell'equazione completa. Problema di Cauchy associato ad un'equazione differenziale lineare di ordine n. Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti. Metodo di somiglianza per la determinazione di un integrale particolare di un'equazione del secondo ordine, non omogenea a coefficienti costanti con termine noto di tipo polinomiale, esponenziale, trigonometrico. Equazioni differenziali lineari omogenee di Eulero del secondo ordine. Metodo di soluzione diretta e di riduzione di un'equazione di Eulero ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine omogenea a coefficienti costanti.

Testi di riferimento

[1] R.A. Adams, C. Essex: *Calcolo Differenziale 2, Funzioni di più variabili*, Ed. CEA, 2014.

[2] M. Bramanti: *Esercitazioni di Analisi Matematica 2*, Ed. Progetto Leonardo, 2012.

[3] S. Salsa & A. Squellati: *Esercizi di Analisi Matematica 2*, Ed. Zanichelli, 2011.