Programma di Equazioni Differenziali 2 - A.A. 2012-2013
II parte (Prof. Fabio ANCONA)

Laurea Magistrale in Matematica

1. Leggi di conservazione scalari in una variabile spaziale

Legame con l'equazione di Hamilton-Jacobi. Un modello di traffico automobilistico. Formulazione di un problema di controllo al bordo. Formulazione di un problema di leggi di conservazione su reti. Modelli di leggi di conservazione con flussi non locali: catene di produzione, traffico pedonale.

2. Soluzioni classiche e formazione di singolarità

Metodo delle caratteristiche applicato all'analisi di leggi di conservazione. Tempo massimale di esistenza di soluzioni classiche. Fenomeno della catastrofe del gradiente. Presenza di punti di discontinuità deboli (delle derivate) e forti (della soluzione): shock. Alcuni esempi.

3. Soluzioni deboli (nel senso delle distribuzioni)

Definizione di soluzione debole. Equivalenza tra soluzioni classiche e deboli per funzioni di classe C^1. Chiusura in L^1 dell'insieme delle soluzioni deboli. Definizione di soluzione debole di un problema di Cauchy. Condizioni di Rankine-Hugoniot per soluzioni deboli costanti a pezzi. Interpretazione secondo la regola dell'"ugual area". Punti di discontinuità di salto approssimata e di continuità approssimata. Condizioni di Rankine-Hugoniot per soluzioni deboli in punti di discontinuità di salto approssimata. Funzioni a variazione limitata in due variabili. Proprietà di struttura di funzioni a variazione limitata in due variabili. Definizione di una classe di funzioni Lipschitiziane a pezzi (LP). Caratterizzazione di soluzioni deboli appartenenti alla classe di funzioni (PL). Mancanza di invarianza di soluzioni deboli rispetto a cambiamenti di coordinate.

4. Soluzioni deboli entropicamente ammissibili

Non unicità di soluzioni deboli di un problema di Cauchy. Condizioni di ammissibilità indotte dalla viscosità evanescente. Condizioni di ammissibilità nel senso delle entropie convesse. Entropie di Kruzkhov. Equivalenza tra soluzioni deboli ammissibili nel senso di tutte le entropie convesse e nel senso delle entropie di Kruzkhov. Definizione di soluzione debole entropicamente ammissibile del problema di Cauchy. Proprietà di contrazione della distanza in L^1 tra soluzioni deboli entropicamente ammissibili. Unicità di soluzioni deboli entropicamente ammissibili. Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche appartenenti alla classe di funzioni (PL). Equivalenza tra soluzioni classiche e soluzioni deboli entropiche per funzioni di classe C^1. Condizioni di stabilità delle discontinuità di soluzioni deboli. Interpretazione geometrica. Equivalenza tra le condizioni di stabilità e di ammissibilità entropica per soluzioni deboli costanti a pezzi. Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche appartenenti alla classe di funzioni (PL) tramite condizioni di Rankine-Hugoniot e condizioni di stabilità. Condizioni di ammissibilità alla Lax delle discontinuità di soluzioni deboli. Equivalenza tra le condizioni di ammissibilità alla Lax e le condizioni di stabilità nel caso di leggi di conservazione con flusso convesso. Caratterizzazione di soluzioni di viscosità dell'equazione di Hamilton-Jacobi per funzioni C^1 a pezzi. Legame tra soluzioni di viscosità di Hamilton-Jacobi $C^{1,1}$ a pezzi e soluzioni deboli entropiche (PL) di una legge di conservazione.

5. Un semigruppo di soluzioni

Soluzione (entropicamente ammissibile) del problema di Riemann per una legge di conservazione generale: onde di shock, discontinuità di contatto, onde di rarefazione. Algoritmo di tracciamento dei fronti d'onda per la costruzione di una soluzione approssimata (costante a pezzi) entropicamente ammissibile di un problema di Cauchy con dato iniziale a variazione totale limitata. Teorema di compattezza di Helly per funzioni di una singola variabile a variazione totale uniformemente limitata. Corollario del Teorema di Helly per funzioni di due variabili. Esistenza di soluzioni deboli entropicamente ammissibili di un problema di Cauchy con dato iniziale a variazione totale limitata ed estensione al caso di dati iniziali in L^∞. Estensione dell'operatore di soluzione associato ad una legge di conservazione ad un semigruppo in L^1, contrattivo rispetto alla norma L^1. Principio di confronto tra soluzioni.

6. Il problema al bordo

Formulazione della condizione al bordo per una legge di conservazione in un problema misto ai valori iniziali ed al bordo. Soluzione entropicamente ammissibile del Problema di Riemann al bordo per una legge di conservazione con flusso convesso.

Testi di riferimento

[1] A. Bressan: *Hyperbolic systems of conservation laws The one dimensional Cauchy problem*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.

[2] C. Dafermos: *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, 2010, 3rd edition.

[3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., Providence, 2010; 2nd edition.

Altri testi consigliati

[4] H. Holden and N.H. Risebro: *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer, 2002.

[5] D. Serre: *Systems of Conservation Laws*, Vols. 1-2, Cambridge University Press, 1999.

Possibili ulteriori argomenti di discussione all'esame

1. Formula di Lax-Oleĭnik

Rappresentazione esplicita di soluzioni deboli entropiche del problema di Cauchy per una legge di conservazione con flusso convesso (vedi [3], Paragrafo 3.4.2).

2. Unicità di soluzioni deboli che soddisfano la disuguaglianza unilatera di Oleĭnik

Definizione di soluzione debole ammissibile nel senso di Oleĭnik del problema di Cauchy. Unicità di soluzioni deboli ammissibili nel senso di Oleĭnik per una legge di conservazione con flusso convesso (vedi [3], Paragrafo 3.4.3).

3. Proprietà di soluzioni di leggi di conservazione e di equazioni di H-J

(1) Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche di una legge di conservazione con flusso strettamemente convesso tramite una singola disuguaglianza entropica.
(vedi Materiali didattici: *Minimal entropy conditions for Burgers equation (C. De Lellis, F. Otto & M. Westdickenberg)*).

(2) Proprietà di regolarità SBV (funzioni BV la cui derivata distribuzionale ha parte Cantoriana nulla) per soluzioni deboli entropiche di una legge di conservazione con flusso uniformemente convesso o per gradienti di soluzioni di viscosità di equazioni di Hamilton-Jacobi con Hamiltoniana uniformemente convessa
(vedi Materiali didattici: *A note on admissible solutions of 1D scalar conservation laws and 2D H-J equations (L. Ambrosio & C. De Lellis)*).

4. Estensione della formula di Lax-Oleĭnik al problema col bordo

Rappresentazione esplicita di soluzioni deboli entropiche del problema misto ai valori iniziali ed al bordo per una legge di conservazione con flusso convesso, con dati iniziali ed al bordo in L^∞
(vedi Materiali didattici: *Explicit formula for scalar non-linear conservation laws with boundary conditions (P.G. LeFloch)*, Paragrafi 1, 2).

5. Problemi di controllo per leggi di conservazione

(1) Caratterizzazione dei profili raggiungibili da soluzioni deboli entropiche del problema misto ai valori iniziali ed al bordo, in un istante di tempo fissato $T > 0$, ed in un punto dello spazio fissato $\overline{x}$.
(vedi Materiali didattici: *On the attainable set for conservation laws with boundary control (F. Ancona & A. Marson)*, Paragrafi 1, 2 (fino a Remark. 2.4), 3).

(2) Estensione della formula di rappresentazione esplicita di soluzioni del problema misto ai valori iniziali ed al bordo per una legge di conservazione con flusso convesso, nel caso di dati integrabili (eventualmente non limitati). Buona posizione del problema misto ai valori iniziali ed al bordo. Principio di confronto per soluzioni deboli entropiche del problema misto. Applicazione del principio di confronto per la determinazione della soluzione ottimale in un problema di controllo in un modello di traffico.
(vedi Materiali didattici: *Scalar non-linear conservation laws with integrable boundary data (F. Ancona & A. Marson)*, Paragrafi 1, 2.1-2.3, 3.2-3.3, 5).

6. Problemi di controllo ottimale e soluzioni di equilibrio in modelli di traffico

(1) Esistenza di soluzioni ottimali per leggi di conservazione in un modello motivato da un problema di traffico in cui si vuole minimizzare il costo totale della partenza anticipata e dell'arrivo ritardato per una popolazione di automobilisti che si muovono da un'assegnata posizione di partenza (area residenziale) e devono raggiungere un'assegnata posizione di arrivo (luogo di lavoro).
(2) Condizioni necessarie per una soluzione ottimale e descrizione della struttura di una tale soluzione.
(3) Esistenza e unicità di una soluzione di equilibrio di Nash in cui nessun autista può diminuire il suo costo personale modificando il suo tempo di partenza.
(4) Calcolo della soluzione ottimale e della soluzione di equilibrio di Nash in alcuni problemi di traffico.

(vedi Materiali didattici: *Optima and equilibria for a model of traffic flow (A. Bressan & K. Han)*, Paragrafi 1, 2.1 per (1); Paragrafo 2.2 per (2); Paragrafo 3 per (3); Paragrafo 4 per (4)).

7. Metodi numerici per leggi di conservazione

(1) Metodi conservativi e consistenti per la costruzione di approssimazioni numeriche della soluzione. Teorema di Lax-Wendroff sulla convergenza delle approssimazioni numeriche ad una soluzione debole. Metodi a variazione totale stabile, a variazione totale non crescente, contrattivi in L^1, monotoni. Convergenza ad una soluzione debole entropica di approssimazioni numeriche generate da metodi conservativi, consistenti, a variazione totale stabile e uniformemente limitati.
(2) Stime (a-posteriori) di errore sulla convergenza ad una soluzione debole entropica di soluzioni approssimate.
(3) Stime a-priori di errore tra soluzioni deboli entropiche e soluzioni dell'approssimazione parabolica viscosa.

(vedi Materiali didattici: *A short course in difference methods (H. Holden & N.H. Risebro)*, Paragrafo 3.1 per (1); Paragrafo 3.2 per (2); Paragrafo 3.3 per (3)).

Program of Differential Equations 2 - A.Y. 2012-2013
II part (Prof. Fabio ANCONA)

Master Degree in Mathematics

1. Scalar conservation laws in one space variable

Link with Hamilton-Jacobi equation. A model of vehicular traffic flow. Formulation of a boundary control problem. Formulation of a problem of conservation laws on networks. Models of conservation laws with non local fluxes: supply chains, pedestrian traffic.

2. Classical solutions and formation of singularities

Method of characteristics applied to the analysis of conservation laws. Maximal time of existence of classical solutions. Phenomena of the gradient catastrophe. Presence of points of weak discontinuity (in the derivative) and strong discontinuity (in the solution itself): shock. Some examples.

3. Weak solutions (in distributional sense)

Definition of weak solution. Equivalence between classical solutions and weak solutions for C^1 functions. Closure in L^1 of the set of weak solutions. Definition of weak solution of a Cauchy problem. Rankine-Hugoniot condition for piecewise constant weak solutions. Interpretation according with the "equal area" rule. Points of approximate jump discontinuity and of approximate continuity. Rankine-Hugoniot conditions for weak solutions at point of approximate jump discontinuity. Functions of bounded variation (BV) in two variables. Structural properties of functions of bounded variation in two variables. Definition of a class of piecewise Lipschitz functions (PL). Characterization of weak solutions belonging to the class of (PL) functions. Lack of invariance with respect to changes of coordinates for weak solutions.

4. Weak entropy ammissibile solutions

Non uniqueness of weak solutions of the Cauchy problem. Admissibility conditions induced by the vanishing viscosity. Admissibility conditions given by the convex entropies. Kruzkhov entropies. Equivalence between admissibility conditions for weak solutions determined by the entropy inequalities for all convex entropies and those determined only by the Kruzkhov entropies. Definition of entropy admissible weak solution of the Cauchy problem. Contraction property in L^1 for entropy weak solutions. Uniqueness of entropy weak solutions. Characterization of entropy weak solutions belonging to the class of (PL) functions. Equivalence between classical solutions and entropy weak solutions for C^1 functions. Stability conditions for discontinuities of weak solutions. Geometric interpretation. Equivalence between stability conditions and entropy admissibility conditions for piecewise constant weak solutions. Characterization of entropy weak solutions belonging to the class of (PL) functions by means of Rankine-Hugoniot conditions and stability conditions. Lax admissibility conditions for discontinuities of weak solutions. Equivalence between Lax admissibility conditions and stability conditions for conservation laws with convex flux. Characterization of viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation for piecewise C^1 functions. Link between viscosity solutions of the Hamilton-Jacobi equation belonging to the class of piecewise $C^{1,1}$ functions and entropy weak solutions of a conservation law.

5. A semigroup of solutions

Entropy admissible solution of the Riemann problem for a general conservation law: shock waves, contact discontinuities, rarefaction waves. Wave-front tracking algorithm for the construction of a (piecewise constant) entropy admissible approximate solution of a Cauchy problem with initial data of bounded variation. Helly's compactness theorem for functions of a single variable with uniformly bounded total variation. Corollary of Helly's theorem for functions of two variables. Existence of entropy admissible weak solutions of a Cauchy problem with initial data of bounded variation and extension to the case of data in L^∞. Extension of the solution operator generated by a conservation law to a semigroup in L^1 which is contractive with repeat to the L^1 norm. Comparison principle between solutions.

6. The boundary value problem

Formulation of the boundary condition for a conservation law. Entropy admissible solution of the Boundary Riemman Problem for a conservation law with convex flux.

Reference books

[1] A. Bressan: *Hyperbolic systems of conservation laws The one dimensional Cauchy problem*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.

[2] C. Dafermos: *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, 2010, 3rd edition.

[3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., Providence, 2010; 2nd edition.

Further suggested books

[4] H. Holden and N.H. Risebro: *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer, 2002.

[5] D. Serre: *Systems of Conservation Laws*, Vols. 1-2, Cambridge University Press, 1999.

Further possible topics of discussion for the exam

1. Lax-Oleĭnik formula

Explicit representation of entropy weak solutions of the Cauchy problem for a conservation law with convex flux (see [3], Section 3.4.2).

2. Uniqueness of weak solutions that satisfy the unilateral Oleĭnik inequality

Definition of weak solutions of the Cauchy problem that are admissible in the sense of Oleĭnik. Uniqueness of weak solutions admissible in the sense of Oleĭnik for a conservation law with convex flux (see [3], Section 3.4.3).

3. Properties of solutions of conservation laws and of H-J equations

(1) Characterization of entropy weak solutions of a conservation law with strictly convex flux by means of a single distributional entropy inequality.
(see Materiali didattici: *Minimal entropy conditions for Burgers equation (C. De Lellis, F. Otto & M. Westdickenberg)*).

(2) SBV regularity property (BV functions whose distributional derivative has zero Cantor part) for entropy weak solutions of conservation laws with uniformly convex flux and for gradients of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with uniformly convex Hamiltonian.
(see Materiali didattici: *A note on admissible solutions of 1D scalar conservation laws and 2D H-J equations (L. Ambrosio & C. De Lellis)*).

4. Extension of the Lax-Oleĭnik formula to the boundary value problem

Explicit representation of entropy weak solutions of the mixed initial-boundary value problem for a conservation law with convex flux, with L^∞ initial and boundary data
(see Materiali didattici: *Explicit formula for scalar non-linear conservation laws with boundary conditions (P.G. LeFloch)*, Sections 1, 2).

5. Control problems for conservation laws

(1) Characterization of reachable profiles of entropy weak solutions of the mixed initial-boundary value problem, at a fixed time $T > 0$, and at a fixed point $\overline{x}$.
(see Materiali didattici: *On the attainable set for conservation laws with boundary control (F. Ancona & A. Marson)*, Sections 1, 2 (untill Remark. 2.4), 3).

(2) Extension of the explicit representation formula of solutions of the mixed initial-boundary value problem for a conservation law with convex flux to the case of integrable (possibly unbounded) initial and boundary data. Well-posedness of the mixed initial-boundary value problem. Comparison principle for entropy weak solutions of the mixed problem. Use of the comparison principle for the construction of the optimal solution in a control problem for a traffic model.
(see Materiali didattici: *Scalar non-linear conservation laws with integrable boundary data (F. Ancona & A. Marson)*, Sections 1, 2.1-2.3, 3.2-3.3, 5).

6. Optimal control problems and equilibria solutions in traffic models

(1) Existence of optimal solutions for conservation laws in a model motivated by a traffic problem where one wants to minimize the total cost of early starting and late arriving for a population of car drivers that start from an assigned location (a residential area) and need to reach an assigned destination (a working place).
(2) Necessary conditions for an optimal solution and description of the structure of such a solution.
(3) Existence and uniqueness of a Nash equilibrium solution where no driver can lower his individual cost by changing his own departure time.
(4) Computation of the optimal solution and of the Nash equilibrium solution in some traffic problems.

(see Materiali didattici: *Optima and equilibria for a model of traffic flow (A. Bressan & K. Han)*, Sections 1, 2.1 for (1); Section 2.2 for (2); Section 3 for (3); Section 4 for (4)).

7. Numerical methods for conservation laws

(1) Conservative and consistent methods for the construction of numerical approximations of the solution. Lax-Wendroff theorem on the convergence of the numerical approximations to a weak solutions. Methods total variation stable, total variation diminishing, L^1-contractive. Convergence to an entropy weak solution of numerical approximations generated by conservative, consistent, total variation stable and uniformly bounded methods.
(2) (A-posteriori) error estimates on the convergence of approximate solutions to a weak entropy solution.
(3) A-priori error estimates between entropy weak solutions and solutions of the viscous parabolic approximation.

(see Materiali didattici: *A short course in difference methods (H. Holden & N.H. Risebro)*, Section 3.1 for (1); Section 3.2 for (2); Section 3.3 for (3)).