Introduzione alle Equazioni alle Derivate Parziali

Laurea Magistrale in Matematica

Programma - A.A. 2015-2016

(Prof. Fabio Ancona)

1. **Nozioni e concetti preliminari sulle equazioni alle derivate parziali**

   Notazioni utilizzate.

   Ordine di un'equazione. Classificazione delle equazioni lineari, semilineari, quasilineari, completamente non lineari.

   Alcuni modelli lineari: equazione di trasporto, equazione di diffusione, equazione delle onde, equazione di Laplace, equazione di Black- Scholes, equazione di Schrodinger.

   Alcuni modelli non lineari: equazione di Burgers, equazione delel superfici minime, equazione di Maxwell, equazione di Navier-Stokes.

   Problemi ben posti.

   Equazione di trasporto a coefficienti costanti. Problema di Cauchy per equazioni omogenee e non omogenee. Soluzioni classiche e deboli (metodo delle caratteristiche).

2. **Equazione di Laplace e funzioni armoniche**

   Classificazione delle equazioni semilineari del secondo ordine: ellittiche, paraboliche, iperboliche.

   Proprietà generali. Invarianza per traslazioni e per rotazioni. Derivazione della soluzione fondamentale.

   Potenziale newtoniano in tutto lo spazio con densità f regolare a supporto compatto. Formula di rappresentazione di Green, definizione della funzione di Green relativa a un aperto Ω e del nucleo di Poisson. Costruzione della funzione di Green sulla palla, formula integrale di Poisson per le funzioni armoniche. Soluzione del problema di Dirichlet nella palla. Costruzione della funzione di Green sul semispazio, formula integrale di Poisson per le funzioni armoniche. Soluzione del problema di Dirichlet nel semispazio (senza dimostrazione).

   Relazione tra funzioni armoniche in $\mathbb{R}^2$ e funzioni olomorfe.

   Definizione di derivata debole per una funzione misurabile in un aperto Ω. La derivata debole di una funzione è univocamente definita a meno di insiemi di misura nulla. Esempi. Lo spazio $H^1(\Omega)$ e lo spazio $H^1_0(\Omega)$. Il funzionale di Dirichlet, caratterizzazione variazionale delle funzioni armoniche.

   Proprietà della media sferica e solida e caratterizzazione delle funzioni armoniche. Teorema: le funzioni che soddisfano la proprietà della media sono $\mathcal{C}^\infty$ e armoniche.

   Stime a priori del gradiente e stime di Cauchy (queste ultime senza dimostrazione). Analiticità delle funzioni armoniche (senza dimostrazione). Disuguaglianza di Harnack.

Teorema di convergenza di Harnack e teorema di Ascoli- Arzelà per le funzioni armoniche. Teorema di Liouville per funzioni armoniche limitate dall'alto (o dal basso).

Funzioni subarmoniche e superarmoniche. Principi del massimo forte e debole, controesempi in domini illimitati. Teorema di Liouville per funzioni subarmoniche in $\mathbb{R}^2$, controesempi in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Risultati di unicità per problemi di Dirichlet in domini limitati. Unicità delle soluzioni del problema di Dirichlet in complementari di domini limitati nella classe delle funzioni limitate (per $n = 2$) e nella classe delle funzioni con limite assegnato all'infinito (per $n \geq 3$). Unicità della soluzione limitata del problema di Dirichlet nel semispazio, procedimento di simmetrizzazione.

Sollevamento armonico di funzioni subarmoniche. Caratterizzazioni equivalenti di funzioni subarmoniche. Soluzioni generalizzate di Perron del problema di Dirichlet in aperti limitati con dato al bordo limitato, teorema di Perron. Definizione di barriere, barriere locali e barriere deboli. Criteri geometrici per l'esistenza di barriere: condizione della sfera esterna, condizione del cono esterno (cenni). Criteri topologici per l'esistenza di barriere deboli nel piano (cenni). Definizione di punti regolari del bordo per il laplaciano e soluzione del problema di Dirichlet in aperti limitati con punti di frontiera regolari (dimostrazione). Esistenza e unicità della soluzione del problema di Dirichlet in complementari di aperti limitati con condizioni di crescita.

Interpretazione probabilistica del laplaciano e dell'equazione di diffusione. Moto Browniano come limite di passeggiata aleatoria simmetrica nel piano.

2. Equazione di diffusione o del calore

Proprietà generali: principio di sovrapposizione, irreversibilità temporale e simmetrie. Dilatazioni paraboliche.

Derivazione del modello di conduzione del calore. Problemi misti ai dati iniziali ed al bordo per l'equazione del calore. Condizioni al bordo per l'equazione del calore: di Dirichlet, Neumann, Robin. Frontiera parabolica. Buona posizione del problema misto su un intervallo limitato e con condizioni al bordo di Dirichlet.

Analisi della soluzione stazionaria e del regime transitorio. Metodo di separazione delle variabili. Convergenza della serie costruita col metodo di separazione delle variabili. Convergenza della soluzione al dato iniziale, uniformemente sui compatti, al tendere del tempo a zero.

Analisi dell'unicità della soluzione col metodo dell'energia. Sottosoluzioni e soprasoluzioni dell'equazione del calore omogenea. Principio di massimo debole per sottosoluzioni, soprasoluzioni e soluzioni dell'equazione omogenea del calore su domini limitati. Confronto, unicità e stabilità di soluzioni dell'equazione del calore non omogenea su domini limitati con condizioni di Dirichlet.

Proprietà di media di sottosoluzioni sulla palla del calore. Principio di massimo forte per sottosoluzioni, soprasoluzioni e soluzioni dell'equazione omogenea del calore su domini limitati, connessi. Velocità infinita di propagazione di una perturbazione. Lemma di Hopf. Unicità della soluzione per il problema misto con condizioni al bordo di Neumann/Robin.

Soluzione fondamentale dell'equazione del calore. Derivazione e proprietà.

Esistenza di soluzioni per il problema di Cauchy omogeneo con dato iniziale nella classe di Tichonov. Problema non omogeneo e Principio di Duhamel. Esistenza di soluzioni dell'equazione del calore non omogenea con dato iniziale nella classe di Tichonov. Contro-esempio di Tichonov all'unicità della soluzione (non appartenenente alla classe di Tichonov) dell'equazione omogenea del calore. Principio di massimo per sottosoluzioni, soprasoluzioni e soluzioni del problema di Cauchy dell'equazione omogenea del calore che appartengano alla classe di Tichonov. Unicità della soluzione dell'equazione del calore non omogenea per il problema di Cauchy nella classe di Tichonov.

4. Equazione delle onde

Derivazione dell'equazione delle onde in dimensione 1: onde trasversali in una corda elastica. Onde progressive e regressive, onde piane, onde sferiche.

Energia associata all'equazione delle onde. Teorema di velocità finita di propagazione, dominio di influenza e di dipendenza. Unicità delle soluzioni del problema di Cauchy. Unicità della soluzione del problema di Dirichlet e Neumann con metodi di energia.

Classificazione delle equazioni lineari del secondo ordine (in dimensione 1) in ellittiche, paraboliche e iperboliche. Linee caratteristiche e seconda forma canonica per le equazioni iperboliche. Formula di d'Alembert per la soluzione del problema di Cauchy, dimostrazione. Regolarità della soluzione.

Il metodo di Duhamel per la soluzione dell'equazione delle onde non omogenea in dimensione 1, dimostrazione.

Il problema di Cauchy Dirichlet omogeneo sulla semiretta e su un intervallo finito, metodo di riflessione e condizioni di compatibilità dei dati. Metodo di separazione delle variabili per la soluzione del problema di Cauchy Dirichlet omogeneo su un intervallo finito.

Metodo delle medie sferiche. Soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^3$, formula di Kirchhoff. Metodo della discesa, soluzione dell'equazione delle onde in $\mathbb{R}^2$, formula di Poisson. Principio di Huygens.

Testi di riferimento

1. S. Salsa, *Partial Differential Equations in Action: From Modelling to Theory*, Springer, Universitext, Milano, 2008.
2. L. C. Evans *Partial Differential Equations*, AMS, 2010 (2^a edizione).
3. W. A. Strauss, *Partial Differential Equations. An Introduction*, New York: Wiley, 1992.