Programma di Equazioni Differenziali - A.A. 2013-2014
II parte (Prof. Fabio ANCONA)

Laurea Magistrale in Matematica

1. Leggi di conservazione scalari in una variabile spaziale

Legame con l'equazione di Hamilton-Jacobi. Un modello di traffico automobilistico. Formulazione di un problema di controllo al bordo. Formulazione di un problema di leggi di conservazione su reti.

2. Soluzioni classiche e formazione di singolarità

Metodo delle caratteristiche applicato all'analisi di leggi di conservazione. Tempo massimale di esistenza di soluzioni classiche. Fenomeno della catastrofe del gradiente. Alcuni esempi.

3. Soluzioni deboli (nel senso delle distribuzioni)

Definizione di soluzione debole. Equivalenza tra soluzioni classiche e deboli per funzioni di classe C^1. Chiusura in L^1 dell'insieme delle soluzioni deboli. Definizione di soluzione debole di un problema di Cauchy. Condizioni di Rankine-Hugoniot per soluzioni deboli costanti a pezzi. Interpretazione secondo la regola dell'"ugual area". Punti di discontinuità di salto approssimato e di continuità approssimata. Condizioni di Rankine-Hugoniot per soluzioni deboli in punti di discontinuità di salto approssimata. Funzioni a variazione limitata in due variabili. Proprietà di struttura di funzioni a variazione limitata in due variabili. Definizione di una classe di funzioni Lipschitiziane a pezzi (LP). Caratterizzazione di soluzioni deboli appartenenti alla classe di funzioni (PL). Mancanza di invarianza di soluzioni deboli rispetto a cambiamenti di coordinate.

4. Soluzioni deboli entropicamente ammissibili

Non unicità di soluzioni deboli di un problema di Cauchy. Condizioni di ammissibilità indotte dalla viscosità evanescente. Condizioni di ammissibilità nel senso delle entropie convesse. Entropie di Kruzkhov. Equivalenza tra soluzioni deboli ammissibili nel senso di tutte le entropie convesse e nel senso delle entropie di Kruzkhov (senza dimostrazione). Definizione di soluzione debole entropicamente ammissibile del problema di Cauchy. Proprietà di contrazione della distanza in L^1 tra soluzioni deboli entropicamente ammissibili. Unicità di soluzioni deboli entropicamente ammissibili. Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche appartenenti alla classe di funzioni (PL). Equivalenza tra soluzioni classiche e soluzioni deboli entropiche per funzioni di classe C^1. Condizioni di stabilità delle discontinuità di soluzioni deboli. Interpretazione geometrica. Equivalenza tra le condizioni di stabilità e di ammissibilità entropica per soluzioni deboli costanti a pezzi. Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche appartenenti alla classe di funzioni (PL) tramite condizioni di Rankine-Hugoniot e condizioni di stabilità. Condizioni di ammissibilità alla Lax delle discontinuità di soluzioni deboli. Equivalenza tra le condizioni di ammissibilità alla Lax e le condizioni di stabilità nel caso di leggi di conservazione con flusso convesso. Caratterizzazione di soluzioni di viscosità dell'equazione di Hamilton-Jacobi per funzioni C^1 a pezzi. Legame tra soluzioni di viscosità di Hamilton-Jacobi $C^{1,1}$ a pezzi e soluzioni deboli entropiche (PL) di una legge di conservazione.

5. Un semigruppo di soluzioni

Soluzione (entropicamente ammissibile) del problema di Riemann per una legge di conservazione con flusso convesso: onde di shock e onde di rarefazione. Algoritmo di tracciamento dei fronti d'onda per la costruzione di una soluzione approssimata (costante a pezzi) entropicamente ammissibile di un problema di Cauchy con dato iniziale a variazione totale limitata. Teorema di compattezza di Helly per funzioni di una singola variabile a variazione totale uniformemente limitata. Corollario del Teorema di Helly per funzioni di due variabili. Esistenza di soluzioni deboli entropicamente ammissibili di un problema di Cauchy con dato iniziale a variazione totale limitata ed estensione al caso di dati iniziali in L^∞. Estensione dell'operatore di soluzione associato ad una legge di conservazione ad un semigruppo in L^1, contrattivo rispetto alla norma L^1. Principio di confronto tra soluzioni.

Testi di riferimento

[1] A. Bressan: *Hyperbolic systems of conservation laws The one dimensional Cauchy problem*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2000.

[2] C. Dafermos: *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, 2010, 3rd edition.

[3] L.C. Evans: *Partial Differential Equations*, American Math. Soc., Providence, 2010; 2nd edition.

Altri testi consigliati

[4] H. Holden and N.H. Risebro: *Front Tracking for Hyperbolic Conservation Laws*, Springer, 2002.

[5] D. Serre: *Systems of Conservation Laws*, Vols. 1-2, Cambridge University Press, 1999.

Possibili ulteriori argomenti di discussione all'esame

1. Formula di Lax-Oleĭnik

Rappresentazione esplicita di soluzioni deboli entropiche del problema di Cauchy per una legge di conservazione con flusso convesso (vedi [3], Paragrafo 3.4.2).

2. Unicità di soluzioni deboli che soddisfano la disuguaglianza unilatera di Oleĭnik

Definizione di soluzione debole ammissibile nel senso di Oleĭnik del problema di Cauchy. Unicità di soluzioni deboli ammissibili nel senso di Oleĭnik per una legge di conservazione con flusso convesso (vedi [3], Paragrafo 3.4.3).

3. Proprietà di soluzioni di leggi di conservazione e di equazioni di H-J

(1) Caratterizzazione di soluzioni deboli entropiche di una legge di conservazione con flusso strettamemente convesso tramite una singola disuguaglianza entropica.
(vedi Materiali didattici: *Minimal entropy conditions for Burgers equation (C. De Lellis, F. Otto & M. Westdickenberg)*).

(2) Proprietà di regolarità SBV (funzioni BV la cui derivata distribuzionale ha parte Cantoriana nulla) per soluzioni deboli entropiche di una legge di conservazione con flusso uniformemente convesso o per gradienti di soluzioni di viscosità di equazioni di Hamilton-Jacobi con Hamiltoniana uniformemente convessa
(vedi Materiali didattici: *A note on admissible solutions of 1D scalar conservation laws and 2D H-J equations (L. Ambrosio & C. De Lellis)*).

4. Estensione della formula di Lax-Oleĭnik al problema col bordo

Rappresentazione esplicita di soluzioni deboli entropiche del problema misto ai valori iniziali ed al bordo per una legge di conservazione con flusso convesso, con dati iniziali ed al bordo in L^∞
(vedi Materiali didattici: *Explicit formula for scalar non-linear conservation laws with boundary conditions (P.G. LeFloch)*, Paragrafi 1, 2).

5. Problemi di controllo per leggi di conservazione

(1) Caratterizzazione dei profili raggiungibili da soluzioni deboli entropiche del problema misto ai valori iniziali ed al bordo, in un istante di tempo fissato $T > 0$, ed in un punto dello spazio fissato $\overline{x}$.
(vedi Materiali didattici: *On the attainable set for conservation laws with boundary control (F. Ancona & A. Marson)*, Paragrafi 1, 2 (fino a Remark. 2.4), 3).

(2) Estensione della formula di rappresentazione esplicita di soluzioni del problema misto ai valori iniziali ed al bordo per una legge di conservazione con flusso convesso, nel caso di dati integrabili (eventualmente non limitati). Buona posizione del problema misto ai valori iniziali ed al bordo. Principio di confronto per soluzioni deboli entropiche del problema misto. Applicazione del principio di confronto per la determinazione della soluzione ottimale in un problema di controllo in un modello di traffico.
(vedi Materiali didattici: *Scalar non-linear conservation laws with integrable boundary data (F. Ancona & A. Marson)*, Paragrafi 1, 2.1-2.3, 3.2-3.3, 5).

6. Problemi di controllo ottimale e soluzioni di equilibrio in modelli di traffico

(1) Esistenza di soluzioni ottimali per leggi di conservazione in un modello motivato da un problema di traffico in cui si vuole minimizzare il costo totale della partenza anticipata e dell'arrivo ritardato per una popolazione di automobilisti che si muovono da un'assegnata posizione di partenza (area residenziale) e devono raggiungere un'assegnata posizione di arrivo (luogo di lavoro).
(2) Condizioni necessarie per una soluzione ottimale e descrizione della struttura di una tale soluzione.
(3) Esistenza e unicità di una soluzione di equilibrio di Nash in cui nessun autista può diminuire il suo costo personale modificando il suo tempo di partenza.
(4) Calcolo della soluzione ottimale e della soluzione di equilibrio di Nash in alcuni problemi di traffico.

(vedi Materiali didattici: *Optima and equilibria for a model of traffic flow (A. Bressan & K. Han)*, Paragrafi 1, 2.1 per (1); Paragrafo 2.2 per (2); Paragrafo 3 per (3); Paragrafo 4 per (4)).

7. Metodi numerici per leggi di conservazione

(1) Metodi conservativi e consistenti per la costruzione di approssimazioni numeriche della soluzione. Teorema di Lax-Wendroff sulla convergenza delle approssimazioni numeriche ad una soluzione debole. Metodi a variazione totale stabile, a variazione totale non crescente, contrattivi in L^1, monotoni. Convergenza ad una soluzione debole entropica di approssimazioni numeriche generate da metodi conservativi, consistenti, a variazione totale stabile e uniformemente limitati.
(2) Stime (a-posteriori) di errore sulla convergenza ad una soluzione debole entropica di soluzioni approssimate.
(3) Stime a-priori di errore tra soluzioni deboli entropiche e soluzioni dell'approssimazione parabolica viscosa.

(vedi Materiali didattici: *A short course in difference methods (H. Holden & N.H. Risebro)*, Paragrafo 3.1 per (1); Paragrafo 3.2 per (2); Paragrafo 3.3 per (3)).