PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 26 Novembre 2021

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3		

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4}{(\ln n)^{\ln n}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\lim_{n} \frac{n^4}{(\ln n)^{\ln n}} = \lim_{n} e^{(4-\ln(\ln n))\cdot \ln n} = 0 \Rightarrow$ la serie potrebbe essere convergente

Confronto asintotico con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: $\lim_{n} \frac{\frac{n^4}{(\ln n)^{\ln n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n} \frac{n^6}{(\ln n)^{\ln n}} = \lim_{n} e^{(6-\ln(\ln n))\cdot \ln n} = 0$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^4}{(\ln n)^{\ln n}}$ è convergente per confronto asintotico con $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ che è convergente.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{2\ln(\cos x) + e^{(x^2)} - 1}{\tanh(x^\alpha)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $\tanh(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0$, di:

$$2\ln(\cos x) + e^{(x^2)} - 1$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$2\ln(\cos x) = 2\ln\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = 2\left[\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^2\right] =$

$= -x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) = -x^2 - \frac{x^4}{6} + o(x^4) \Rightarrow 2\ln(\cos x) + e^{x^2} - 1 = -x^2 - \frac{x^4}{6} + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = \frac{x^4}{3} + o(x^4)$

- Se $\alpha > 0$, $\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$
- Se $\alpha = 0$, $\ell_0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}}{\tanh(1)} = 0$
- Se $\alpha < 0$, $\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^4}{3}}{\tanh(x^\alpha)} = \lim_{y\to +\infty} \frac{\frac{y^{4/\alpha}}{3}}{\tanh(y)} = 0$

(Se esiste)

$\ell_\alpha =$

$\hookrightarrow = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ \frac{1}{3} & \text{se } \alpha = 4 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln|5e^x - e^{2x}|$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 5\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x\to \ln 5} f(x) = -\infty \Rightarrow \boxed{x = \ln 5 \text{ è asintoto verticale bilatero}}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(e^{2x}(1-5e^{-x})) =$
$= \lim_{x\to+\infty} 2x + \ln(1-5e^{-x}) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x+\ln(1-5e^{-x})}{x} = 2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} \ln(1-5e^{-x}) = 0$
$\Rightarrow \boxed{y = 2x \text{ è asintoto obliquo per } x\to+\infty}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln(e^x(5-e^x)) = \lim_{x\to-\infty} x + \ln(5-e^{+x}) = -\infty$,
$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+\ln(5-e^{+x})}{x} = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \ln(5-e^x) = \ln 5 \Rightarrow \boxed{y = x + \ln 5 \text{ è asintoto obliquo per } x\to-\infty}$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{5e^x - 2e^{2x}}{5e^x - e^{2x}} = \frac{5-2e^x}{5-e^x}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} =]-\infty, \ln\frac{5}{2}] \cup]\ln 5, +\infty[\Rightarrow f$ è crescente su $]-\infty, \ln\frac{5}{2}]$ e su $]\ln 5, +\infty[$

f è monotona decrescente su $[\ln\frac{5}{2}, \ln 5[$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x_0 = \ln\frac{5}{2}$ è unico punto di massimo locale (non assoluto), $f(\ln\frac{5}{2}) = \ln(\frac{25}{4})$

Non esistono punti di minimo locale (o assoluto)

(v) Determinare l'immagine di f: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.