PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 26 Novembre 2021

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^3}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\lim_n \frac{(\ln n)^{(\ln n)}}{n^3} = \lim_n \frac{e^{\ln n \cdot \ln(\ln n)}}{e^{3\ln n}} = \lim_n e^{\ln n(\ln(\ln n) - 3)} = +\infty \Rightarrow$ la serie non è convergente poiché il termine generale non è infinitesimo. La serie è quindi divergente a $+\infty$ essendo una serie regolare poiché è una serie a termini non negativi.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{6(\sqrt[3]{\cos x} - 1) + \ln(1+x^2)}{\sinh(x^\alpha)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, $\sinh(y) = y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}y^2 + o(y^2)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0$, di:

$$6\left(\sqrt[3]{\cos x} - 1\right) + \ln(1+x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$6(\sqrt[3]{\cos x} - 1) = 6\left(\sqrt[3]{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} - 1\right) = 6\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{72} - \frac{1}{9}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)\right)^2 + o(x^4) - 1\right) =$

$= -x^2 + \frac{x^4}{12} - \frac{x^4}{6} + o(x^4) = -x^2 - \frac{x^4}{12} + o(x^4) \Rightarrow 6(\sqrt[3]{\cos x} - 1) + \ln(1+x^2) = -x^2 - \frac{x^4}{12} + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$= -\frac{7}{12}x^4 + o(x^4)$. Se $\alpha > 0$, $\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4}{x^\alpha} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ -\frac{7}{12} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$

. Se $\alpha = 0$, $\ell_0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4}{\operatorname{senh}(1)} = 0$; Se $\alpha < 0$, $\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{7}{12}x^4}{\operatorname{senh}(x^\alpha)} = \lim_{y\to+\infty} \frac{-\frac{7}{12}y^{\frac{4}{\alpha}}}{\operatorname{senh}(y)} = 0$

(Se esiste)

$\ell_\alpha =$

$\Rightarrow = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ -\frac{7}{12} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln\left|2e^{-3x} - e^{-x}\right|$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln\sqrt{2}\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x\to\ln\sqrt{2}} f(x) = -\infty \Rightarrow \boxed{x = \ln\sqrt{2} \text{ è asintoto verticale bilatero}}$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(e^{-x}(1-2e^{-2x})\right) =$

$= \lim_{x\to+\infty} -x + \ln(1-2e^{-2x}) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x+\ln(1-2e^{-2x})}{x} = -1$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (-x) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \ln(1-2e^{-2x}) = 0 \Rightarrow \boxed{y = -x \text{ è asintoto obliquo per } x\to+\infty}$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\left(e^{-3x}(2-e^{2x})\right) =$

$= \lim_{x\to-\infty} -3x + \ln(2-e^{2x}) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x+\ln(2-e^{2x})}{x} = -3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-3x) =$

$= \lim_{x\to-\infty} \ln(2-e^{2x}) = \ln 2 \Rightarrow \boxed{y = -3x + \ln 2 \text{ è asintoto obliquo per } x\to-\infty.}$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{-6e^{-3x} + e^{-x}}{2e^{-3x} - e^{-x}} = \frac{-6 + e^{2x}}{2 - e^{2x}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} =]\ln\sqrt{2}, \ln\sqrt{6}] \Rightarrow f$ è monotona crescente su $]\ln\sqrt{2}, \ln\sqrt{6}]$

f è monotona decrescente su $]-\infty, \ln\sqrt{2}[$ e su $[\ln\sqrt{6}, +\infty[$.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x_0 = \ln\sqrt{6}$ è unico punto di massimo locale (non assoluto), $f(\ln\sqrt{6}) = \ln\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$

Non esistono punti di minimo locale (o assoluto)

(v) Determinare l'immagine di f: $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.