

# PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

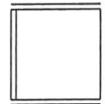
Ing. Aerospaziale (Canale A)  
A.A. 2024/2025, 30 Novembre 2024

## Tema 1

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

1	2	3
---	---	---



**ESERCIZIO 1.** [4 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(3/2)} \ln n \left( \exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\begin{aligned} & n^{(3/2)} \left( e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \right). \ln n = n^{(3/2)} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \left( e^{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)} - 1 \right) \ln n = n^{(3/2)} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \frac{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}\right)}{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \ln n \\ & = n^{(3/2)} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \left( \frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right) \ln n, \quad \lim_n e^{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1 \Rightarrow \text{per confronto asintotico} \\ & \sum_{n=1}^{\infty} n^{(3/2)} \left( e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \right) \ln n \text{ ha lo stesso carattere della serie } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(3/2)} \ln n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{(3/2)}} \text{ che è convergente} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{(3/2)} \left( e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} \right) \ln n \text{ è convergente.} \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 2.** [7 punti] Studiare al variare di  $\alpha > 0$  il limite  $\ell_{\alpha} \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\frac{1}{x}) \exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(\sin(2x)) - \exp(-2x^{\alpha})}{\ln(1-x^2) - \arctan(x^2)}$ .

(Si ricordino gli sviluppi asintotici:  $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$ ,  $\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$ ,  $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$ ,  $\sin y = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$ ,  $\arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$ , per  $y \rightarrow 0$ ).

Determinare lo sviluppo asintotico, per  $x \rightarrow 0^+$ , di:  $\begin{cases} 2x^{\alpha} + o(x^{\alpha}) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 2 \\ -2x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$

e di:

$$\ln(1-x^2) - \arctan(x^2) = -2x^2 + o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$$\begin{aligned} & \cos(\sin(2x)) - e^{-2x^{\alpha}} = \cos\left(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(1 - 2x^{\alpha} + \frac{4x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})\right) = \\ & = 1 - \frac{4}{3}\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) - 1 + 2x^{\alpha} - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = \\ & = -2x^2 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{16}{24}x^4 + o(x^4) + 2x^{\alpha} - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = \\ & = -2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4) + 2x^{\alpha} - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = \begin{cases} 2x^{\alpha} + o(x^{\alpha}) & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 2 \\ -2x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases} \\ & \cos\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} = o(x^n) \quad \forall n \\ & \ln(1-x^2) - \arctan(x^2) = -2x^2 + o(x^2) \end{aligned}$$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^\alpha}{-2x^2} = -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4/3 x^4}{-2x^2} = 0 & \text{se } \alpha = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2x^2}{-2x^2} = 1 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2 \\ 0 & \text{se } \alpha = 2 \\ 1 & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &\approx \arctan(-4) - \ln 3 \\ \Rightarrow y &\approx -\arctan(4) - \ln 3 \text{ è} \\ &\text{asintoto orizzontale per} \\ &x \rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

**ESERCIZIO 3.** [7 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \arctan(e^x - 4) - \ln|e^x - 3|$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1-3e^{-x}) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(e^x - 4) &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow \ln 3} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \ln 3$  asintoto verticale bilatero
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(e^x - 4) - \ln(e^x(1-3e^{-x}))}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln(e^x)}{x} = -1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| - (-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\arctan(e^x - 4) - \ln(e^x(1-3e^{-x}))) + x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$  asintoto obliquo

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione per  $x \rightarrow +\infty$ .

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x-4)^2} - \frac{e^x}{|e^x-3|} \cdot \frac{|e^x-3|}{(e^x-3)} = \frac{e^x(5-e^x)(e^x-4)}{(1+(e^x-4)^2)(e^x-3)}$$

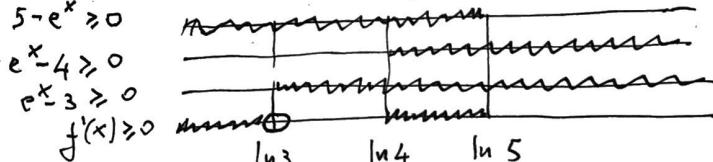
e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$\frac{f'(x) \geq 0}{(5-e^x)(e^x-4) \geq 0}$$

$$\Rightarrow \{f' \geq 0\} = ]-\infty, \ln 3[ \cup [\ln 4, \ln 5]$$

$\Rightarrow f$  è monotona crescente su  $]-\infty, \ln 3[$  e su  $[\ln 4, \ln 5]$

$f$  è monotona decrescente su  $[\ln 3, \ln 4]$  e su  $[\ln 5, +\infty[$



(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$  ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punto di minimo locale, non globale:  $x = \ln 4, f(\ln 4) = 0$

Punto di massimo locale, non globale:  $x = \ln 5, f(\ln 5) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$

(v) Determinare l'immagine di  $f$ :  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.

