PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2024/2025, 30 Novembre 2024

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\left(\frac{3}{2}\right)} \ln n \left(\exp\left(\frac{1}{n^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\bullet\ n^{(3/2)}\left(e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\right)\cdot \ln n = n^{(3/2)} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\left(e^{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}-1\right)\ln n = n^{\left(\frac{3}{2}\right)} e^{\left(\frac{1}{n+1}\right)^2}\left(\frac{2n+1}{(n(n+1))^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\ln n$

$= n^{(3/2)} e^{\frac{1}{(n+1)^2}}\left(\frac{2}{n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)\ln n$, $\lim_{n} e^{\frac{1}{(n+1)^2}} = 1 \Rightarrow$ per confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty} n^{(3/2)}\left(e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\right)\ln n$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{(3/2)}\ln n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{(3/2)}}$

che è convergente $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^{(3/2)}\left(e^{\left(\frac{1}{n^2}\right)} - e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\right)\ln n$ è convergente.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha > 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \dfrac{\cos(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^2}) + \cos(\mathrm{sen}(2x)) - \exp(-2x^\alpha)}{\ln(1-x^2) - \arctan(x^2)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, $\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$, $\mathrm{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, $\arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0^+$, di:

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \cos(\mathrm{sen}(2x)) - \exp(-2x^\alpha) = \begin{cases} 2x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 2 \\ -2x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

e di:

$$\ln(1-x^2) - \arctan(x^2) = -2x^2 + o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$\bullet\ \cos(\mathrm{sen}(2x)) - e^{(-2x^\alpha)} = \cos\left(2x - \frac{8x^3}{6} + o(x^4)\right) - \left(1 - 2x^\alpha + \frac{4x^{2\alpha}}{2} + o(x^{2\alpha})\right) =$

$= 1 - \frac{1}{2}\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(2x - \frac{4}{3}x^3 + o(x^4)\right)^4 + o(x^4) - 1 + 2x^\alpha - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha})$

$= -2x^2 + \frac{8}{3}x^4 + o(x^4) + \frac{16}{24}x^4 + o(x^4) + 2x^\alpha - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) =$

$= -2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o(x^4) + 2x^\alpha - 2x^{2\alpha} + o(x^{2\alpha}) = \begin{cases} 2x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \frac{4}{3}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 2 \\ -2x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$

$\bullet\ \cos\left(\frac{1}{x}\right)e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = o(x^n)\quad \forall n$

$\bullet\ \ln(1-x^2) - \arctan(x^2) = -2x^2 + o(x^2)$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2x^\alpha}{-2x^2} = -\infty & se \ 0<\alpha<2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4/3\, x^4}{-2x^2} = 0 & se \ \alpha = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2x^2}{-2x^2} = 1 & se \ \alpha > 2 \end{cases}$$

(Se esiste) $$\ell_\alpha = \begin{cases} -\infty & se \ 0<\alpha<2 \\ 0 & se \ \alpha = 2 \\ 1 & se \ \alpha > 2 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \arctan(-4) - \ln 3$

$\Rightarrow y = -\arctan(4) - \ln 3$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan(e^x - 4) - \ln|e^x - 3|$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1-3e^{-x}) = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(e^x - 4) = \frac{\pi}{2}$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim\limits_{x\to \ln 3} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \ln 3$ asintoto verticale bilatero
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\arctan(e^x-4) - \ln(e^x(1-3e^{-x}))}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{\ln(e^x)}{x} = -1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (-x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\arctan(e^x-4) - \ln(e^x(1-3e^{-x})) + x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = -x + \frac{\pi}{2}$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+(e^x-4)^2} - \frac{e^x}{|e^x-3|} \cdot \frac{|e^x-3|}{(e^x-3)} = \frac{e^x(5-e^x)(e^x-4)}{(1+(e^x-4)^2)(e^x-3)}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- $f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{(5-e^x)(e^x-4)}{(e^x-3)} \geq 0$

$5-e^x \geq 0$

$e^x - 4 \geq 0$

$e^x - 3 \geq 0$

$f'(x) \geq 0$

$\ln 3 \quad \ln 4 \quad \ln 5$

$\Rightarrow \{f' \geq 0\} =]-\infty, \ln 3[\cup [\ln 4, \ln 5]$

$\Rightarrow$ f è monotona crescente su $]-\infty, \ln 3[$ e su $[\ln 4, \ln 5]$

f è " decrescente su $]\ln 3, \ln 4]$ e su $[\ln 5, +\infty[$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punto di minimo locale, non globale: $x = \ln 4$, $f(\ln 4) = 0$

Punto di massimo locale, non globale: $x = \ln 5$, $f(\ln 5) = \frac{\pi}{4} - \ln 2$

(v) Determinare l'immagine di f: $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.