PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2024/2025, 30 Novembre 2024
Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n}\left(\exp\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right) - \exp\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\bullet\ \frac{n^2}{\ln n}\left(e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{\frac{1}{n^2}}\right) = \frac{n^2}{\ln n} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\left(1 - e^{\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\right) = \frac{n^2}{\ln n} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\left(-\frac{2n+1}{(n(n+1))^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) =$

$= \frac{n^2}{\ln n} e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)}\left(-\frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$, $\lim_n e^{\left(\frac{1}{(n+1)^2}\right)} = 1 \Rightarrow$ per confronto asintotico

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n}\left(e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{\frac{1}{n^2}}\right)$ ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln n}\left(-\frac{1}{n^3}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n \ln n}$

che è divergente a $-\infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{\frac{1}{n^2}}\right)\frac{n^2}{\ln n}$ è divergente a $-\infty$.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha > 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})\exp(-\frac{1}{x^4}) + \exp(-\frac{x^\alpha}{2}) - \cos(\tan(x))}{\ln(1+x^2) - \sinh(x^2)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, $\exp(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$, $\operatorname{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, $\sinh(y) = y + \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, $\tan(y) = y + \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0^+$, di:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\exp\left(-\frac{1}{x^4}\right) + \exp\left(-\frac{x^\alpha}{2}\right) - \cos(\tan(x)) = \begin{cases} -x^\alpha/2 + o(x^\alpha) & se\ 0 < \alpha < 2 \\ 5/12\, x^4 + o(x^4) & se\ \alpha = 2 \\ x^2/2 + o(x^2) & se\ \alpha > 2 \end{cases}$$

e di:

$$\ln(1+x^2) - \sinh(x^2) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$\bullet\ e^{\left(-\frac{x^\alpha}{2}\right)} - \cos(\tan(x)) = 1 - \frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{8} + o(x^{2\alpha}) - \cos\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) =$

$= 1 - \frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{8} + o(x^{2\alpha}) - \left[1 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right)^4\right] =$

$= -\frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{8} + o(x^{2\alpha}) + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \frac{x^4}{24} + o(x^4) =$

$= -\frac{x^\alpha}{2} + \frac{x^{2\alpha}}{8} + o(x^{2\alpha}) + \frac{x^2}{2} + \frac{7}{24}x^4 + o(x^4) = \begin{cases} -x^\alpha/2 + o(x^\alpha) & se\ 0 < \alpha < 2 \\ 5/12\, x^4 + o(x^4) & se\ \alpha = 2 \\ x^2/2 + o(x^2) & se\ \alpha > 2 \end{cases}$

$\bullet\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) e^{\left(-\frac{1}{x^4}\right)} = o(x^n)\ \forall n$

$\bullet\ \ln(1+x^2) - \operatorname{senh}(x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - x^2 + o(x^4) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-x^{\alpha/2}}{-x^4/2} = +\infty & \text{se } 0<\alpha<2 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{5x^4/12}{-x^4/2} = -5/6 & \text{se } \alpha = 2 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x^2/2}{-x^4/2} = -\infty & \text{se } \alpha > 2 \end{cases}$$

(Se esiste)
$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<2 \\ -5/6 & \text{se } \alpha = 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha>2 \end{cases}$$

$\bullet \lim_{x\to -\infty} f(x) = \ln 4 - \arctan(-5)$

$\Rightarrow y = \ln 4 + \arctan(5)$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln|e^x - 4| - \arctan(e^x - 5)$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 4\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x\to+\infty} \ln(1-4e^{-x}) = 0$

$\lim_{x\to+\infty} \arctan(e^x - 5) = \frac{\pi}{2}$

$\bullet \lim_{x\to \ln 4} f(x) = -\infty \Rightarrow x = \ln 4$ asintoto verticale bilatero

$\bullet \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x(1-4e^{-x})) - \arctan(e^x-5)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x)}{x} = 1$

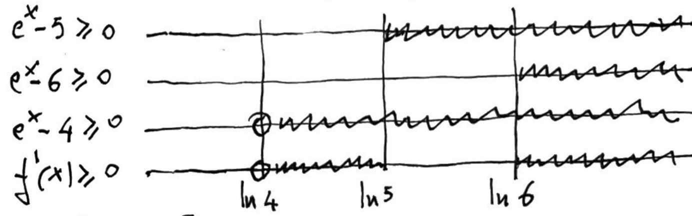
$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln(e^x(1-4e^{-x})) - \arctan(e^x - 5) - x\right] = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow y = x - \frac{\pi}{2}$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{e^x}{|e^x-4|} \cdot \frac{|e^x-4|}{e^x-4} - \frac{e^x}{1+(e^x-5)^2} = \frac{e^x(e^x-5)(e^x-6)}{(e^x-4)(1+(e^x-5)^2)}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\bullet\ f'(x) \geq 0 \iff \dfrac{(e^x-5)(e^x-6)}{(e^x-4)} \geq 0$



$\Rightarrow \{f' \geq 0\} =]\ln 4, \ln 5] \cup [\ln 6, +\infty[$

$\Rightarrow f$ è monotona crescente su $]\ln 4, \ln 5]$ e su $[\ln 6, +\infty[$

" è " decrescente su $]-\infty, \ln 4[$ e su $[\ln 5, \ln 6]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punto di minimo locale, non globale: $x = \ln 6$, $f(\ln 6) = \ln 2 - \frac{\pi}{4}$

Punto di massimo locale, non globale: $x = \ln 5$, $f(\ln 5) = 0$

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.