PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2022/2023, 2 Dicembre 2022
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2}{(n+1)!}\right)^{(n-1)!}-1\right]$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\bullet \left(1+\frac{2}{(n+1)!}\right)^{(n-1)!} = e^{\left[(n-1)!\ln\left(1+\frac{2}{(n+1)!}\right)\right]} = e^{\left[(n-1)!\left(\frac{2}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right)\right]} = e^{\left[\frac{2}{(n+1)n}+o\left(\frac{1}{(n+1)n}\right)\right]}$

$= 1+\frac{2}{n^2+n}+o\left(\frac{1}{n^2+n}\right) \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2}{(n+1)!}\right)^{(n-1)!}-1\right]$ per confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ che è convergente $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1+\frac{2}{(n+1)!}\right)^{(n-1)!}-1\right]$ è una serie convergente.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim\limits_{x\to 0+}\dfrac{\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\cosh(\sqrt{x})\right)}{e^{(\alpha x^2-x^3)}-1}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)$, $e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)$, $\cosh y=1+\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o(y^5)$, $\operatorname{sen}(y)=y-\frac{y^3}{6}+o(y^4)$, per $y\to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x\to 0$, di:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\cosh(\sqrt{x})\right)$$

e di:

$$e^{(\alpha x^2-x^3)}-1$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$\bullet\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{x}{2}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\bullet\ \ln(\cosh(\sqrt{x}))=\ln\left(1+(\cosh(\sqrt{x})-1)\right)=\cosh(\sqrt{x})-1-\frac{(\cosh(\sqrt{x})-1)^2}{2}+o(x^2)=$

$=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2)\right)^2+o(x^2)=\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}-\frac{x^2}{8}+o(x^2)=\frac{x}{2}-\frac{x^2}{12}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\bullet\ \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)-\ln\left(\cosh(\sqrt{x})\right)=\frac{x}{2}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o(x^2)=\frac{x^2}{12}+o(x^2)$ per $x\to 0$

$\bullet\ e^{(\alpha x^2-x^3)}-1=\begin{cases}\alpha x^2+o(x^2) & \text{se } \alpha\neq 0\\ -x^3+o(x^3) & \text{se } \alpha=0\end{cases}$ per $x\to 0$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x^2}{12}}{\alpha x^2} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x^2}{12}}{-x^3} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \dfrac{1}{12\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ -\infty & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln\left(3 - |x^2 - 1|\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =]-2, 2[$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$x = -2$ e $x = 2$ sono asintoti verticali unilateri

$\left(\lim\limits_{x \to \pm 2} f(x) = -\infty \right)$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{(-1)\,\mathrm{sgn}(x^2-1)\,(2x)}{3 - |x^2-1|} = \frac{-2x\,\mathrm{sgn}(x^2-1)}{3-|x^2-1|}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} =]-2,-1[\cup [0,1[$, f' non è definita in $x=-1$, $x=1$

f è monotona crescente su $]-2,-1]$ e su $[0,1]$

f è monotona decrescente su $[-1,0]$ e su $[1,2[$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punti di massimo assoluto: $x=-1$, $x=1$; $\max f = f(\pm 1) = \ln 3$

Punto di minimo relativo: $x = 0$, $f(0) = \ln 2$

$\nexists$ punti di minimo assoluto

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, \ln 3]$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.