# PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

## Ing. Aerospaziale (Canale A)

### A.A. 2022/2023, 2 Dicembre 2022

### Tema 2

COGNOME E NOME: ..............................................................................

MATRICOLA: ........................................

| 1 | 2 | 3 | |
|---|---|---|---|
| | | | |

**ESERCIZIO 1.** [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{3}{(n+1)!}\right)^{n!}-1\right]$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\bullet \left(1-\frac{3}{(n+1)!}\right)^{n!} = e^{\left[n!\ln\left(1-\frac{3}{(n+1)!}\right)\right]} = e^{\left[n!\left(-\frac{3}{(n+1)!}+o\left(\frac{1}{(n+1)!}\right)\right)\right]} = e^{\left[\frac{-3}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right)\right]} = 1-\frac{3}{n+1}+o\left(\frac{1}{n+1}\right) \Rightarrow$$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{3}{(n+1)!}\right)^{n!}-1\right]$ per confronto asintotico ha lo stesso carattere della serie $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ che è divergente a $-\infty$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(1-\frac{3}{(n+1)!}\right)^{n!}-1\right]$ è divergente a $-\infty$

**ESERCIZIO 2.** [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+}\dfrac{e^{(x^5+\alpha x^4)}-1}{\sinh\left(\frac{x^2}{2}\right)+\ln(\cos(x))}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y)=y-\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3}+o(y^3)$, $e^y=1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)$, $\cos y = 1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+o(y^5)$, $\sinh(y)=y+\frac{y^3}{6}+o(y^4)$, per $y\to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x\to 0$, di:

$$\sinh\left(\frac{x^2}{2}\right)+\ln(\cos(x))$$

e di:

$$e^{(x^5+\alpha x^4)}-1$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$$\bullet \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right)=\frac{x^2}{2}+o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\bullet \ln(\cos x)=\ln(1+(\cos x-1)) = \cos x - 1 - \frac{(\cos x-1)^2}{2}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)-\frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)\right)^2+o(x^4)=$$

$$= -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{8}+o(x^4) = -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$

$$\bullet \sinh\left(\frac{x^2}{2}\right)+\ln(\cos x) = \frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^4) = -\frac{x^4}{12}+o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$

$$e^{(x^5+\alpha x^4)}-1 = \begin{cases} \alpha x^4+o(x^4) & \text{se } \alpha\neq 0 \\ x^5+o(x^5) & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad \text{per } x\to 0$$

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\alpha x^4}{-\frac{x^4}{12}} \quad \text{se } \alpha \neq 0 \,, \qquad \ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^5}{-\frac{x^4}{12}} \quad \text{se } \alpha = 0$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} -12\alpha & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

**ESERCIZIO 3.** [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = -\ln\left(6 - |x^2 - 3|\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = ]-3, 3[$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$x = -3$ e $x = 3$ sono asintoti verticali unilateri

$\left(\lim_{x\to\pm 3} f(x) = +\infty\right)$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{-1}{6-|x^2-3|}\left(-\operatorname{sgn}(x^2-3)\right)(2x) = \frac{2x \operatorname{sgn}(x^2-3)}{6-|x^2-3|}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} = ]-\sqrt{3}, 0] \cup ]\sqrt{3}, 3[$ , $f'$ non è definita in $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$

$f$ è monotona crescente su $[-\sqrt{3}, 0]$ e su $[\sqrt{3}, 3[$

$f$ è monotona decrescente su $]-3, -\sqrt{3}]$ e su $[0, \sqrt{3}]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di $f$ ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punto di massimo relativo : $x = 0$, $f(0) = -\ln 3$

$\nexists$ punti di massimo assoluto

Punti di minimo assoluto: $x = -\sqrt{3}$, $x = \sqrt{3}$ ; $\min f = f(\pm\sqrt{3}) = -\ln 6$

(v) Determinare l'immagine di $f$ : $\mathrm{Im}(f) = [-\ln 6, +\infty[$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.