PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 1 Dicembre 2023

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\cdot \lim_n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$

$\cdot \lim_n \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \left(\frac{n+1}{2}\right)}{\left(\frac{n}{2}\right)^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{2} > 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$ è divergente a $+\infty$ per criterio del rapporto asintotico $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^n}{n!}$ è divergente a $+\infty$.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha > 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\exp(-x^\alpha)\cos(\arctan(x)) - \exp(-\frac{x^2}{2})}{\ln(1+x^2) - \operatorname{sen}(x^2)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\ln(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} + o(y^3)$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$, $\operatorname{sen}(y) = y - \frac{y^3}{6} + o(y^4)$, $\arctan(y) = y - \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0^+$, di:

$$\exp(-x^\alpha)\cos(\arctan(x)) - \exp(-\frac{x^2}{2}) = \begin{cases} -x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ -\frac{3}{4}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 4 \\ \frac{x^4}{4} + o(x^4) & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

e di:

$$\ln(1+x^2) - \operatorname{sen}(x^2) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$\cdot\ e^{(-x^\alpha)} \cos(\arctan(x)) = (1 - x^\alpha + o(x^\alpha))\left(1 - \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{3}\right)^4}{24} + o(x^5)\right) =$

$= (1 - x^\alpha + o(x^\alpha))\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = 1 - x^\alpha - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^\alpha) + o(x^5)$

$\cdot\ e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)$

$\Rightarrow e^{(-x^\alpha)} \cos(\arctan(x)) - e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = \left(1 - x^\alpha - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^\alpha) + o(x^5)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{4} - x^\alpha + o(x^5) + o(x^\alpha$

$\cdot\ \ln(1+x^2) - \operatorname{sen}(x^2) = \left(x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^5)\right) - \left(x^2 + o(x^5)\right) = -\frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-x^\alpha}{-\frac{x^4}{2}} = +\infty & \text{se } 0<\alpha<4 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-\frac{3}{4}x^4}{-\frac{x^4}{2}} = \dfrac{3}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x^4}{4}}{-\frac{x^4}{2}} = -\dfrac{1}{2} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

~~(Se esiste) $\ell_\alpha =$~~

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0<\alpha<4 \\ \dfrac{3}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\dfrac{1}{2} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (2|x|-3)\exp\left(-\frac{2}{|x|}\right) & \text{if } x \neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x-3)e^{\left(-\frac{2}{x}\right)}}{x} = 2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim_{x\to+\infty} 2x\left(e^{\left(-\frac{2}{x}\right)} - 1\right) - 3e^{\left(-\frac{2}{x}\right)}$

$= \lim_{x\to+\infty} 2x\left(-\frac{2}{x}\right) - 3 = -7 \Rightarrow y = 2x-7$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

• $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim_{x\to-\infty} \frac{(-2x-3)e^{(2/x)}}{x} = -2$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)+2x = \lim_{x\to-\infty} 2x\left(1-e^{(2/x)}\right) - 3e^{(2/x)} =$

$= \lim_{x\to-\infty} 2x\left(-2/x\right) - 3 = -7 \Rightarrow y = -2x-7$ asintoto obliquo per $x\to-\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = e^{\left(-\frac{2}{|x|}\right)}\left[\frac{2}{x^2}\cdot \mathrm{sgn}(x)(2|x|-3) + 2\,\mathrm{sgn}(x)\right] = \frac{2\,\mathrm{sgn}(x)}{x^2}\left(x^2+2|x|-3\right)e^{\left(-\frac{2}{|x|}\right)}$$

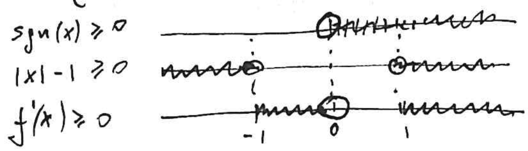
e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

• $x^2+2|x|-3 = (|x|+3)(|x|-1) \Rightarrow f'(x) \geq 0 \iff \mathrm{sgn}(x)(|x|-1) \geq 0 \iff \begin{cases} x \geq 1 & \text{se } x>0 \\ x \geq -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{f' \geq 0\} = [-1,0[\,\cup\, [1,+\infty[$

$\Rightarrow f$ è monotona crescente su $[-1,0]$ e su $[1,+\infty[$

f è " decrescente su $]-\infty,-1]$ e su $[0,1]$.



(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x=0$, $f(0)=0$ è punto di massimo locale, $\nexists$ punti di massimo globale

$x=-1$, $x=1$, $f(-1)=f(1)=-e^{-2}$ sono punti di ~~massimo~~ minimo globale

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = [-e^{-2}, +\infty[$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.