PRIMA PROVA PARZIALE DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 1 Dicembre 2023

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3		

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{n!}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\lim_n \cosh\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right)\frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{n!}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{n!}$

- $\lim_n \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^{(n+1)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{\left(\frac{n}{3}\right)^n} = \lim_n \frac{\left(\frac{n+1}{3}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{3}\right)}{\left(\frac{n}{3}\right)^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{n!}$ è convergente per criterio del rapporto asintotico $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \cosh\left(\frac{1}{n}\right) \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{n!}$ è convergente

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare di $\alpha > 0$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\exp(x^\alpha)\cosh(\text{arctanh}(x)) - \exp(\frac{x^2}{2})}{\sqrt{1-x^2} - \cos(x)}$.

(Si ricordino gli sviluppi asintotici: $\sqrt{1+y} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + o(y^2)$, $e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + o(y^3)$, $\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$, $\cosh(y) = 1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^5)$, $\text{arctanh}(y) = y + \frac{y^3}{3} + o(y^4)$, per $y \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico, per $x \to 0^+$, di:

$$\exp(x^\alpha)\cosh(\text{arctanh}(x)) - \exp(\frac{x^2}{2}) = \longrightarrow \begin{cases} x^\alpha + o(x^\alpha) & \text{se } 0 < \alpha < 4 \\ \frac{5}{4}x^4 + o(x^4) & \text{se } \alpha = 4 \\ \frac{x^4}{4} + o(x^4) & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

e di:

$$\sqrt{1-x^2} - \cos(x) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $e^{(x^\alpha)}\cosh(\text{arctanh}(x)) = (1 + x^\alpha + o(x^\alpha))\cosh\left(x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)\right) = (1 + x^\alpha + o(x^\alpha))\left(1 + \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^2}{2} + \frac{\left(x+\frac{x^3}{3}\right)^4}{24} + o(x^5)\right) =$

$= (1 + x^\alpha + o(x^\alpha))\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = 1 + x^\alpha + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^\alpha) + o(x^5)$

- $e^{(x^2/2)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)$

$\Rightarrow e^{(x^\alpha)}\cosh(\text{arctanh}(x)) - e^{(x^2/2)} = \left(1 + x^\alpha + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^\alpha) + o(x^5)\right) - \left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right) = \frac{x^4}{4} + x^\alpha + o(x^5) + o(x^\alpha)$

- $\sqrt{1-x^2} - \cos x = \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + o(x^5)\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) = -\frac{x^4}{6} + o(x^4)$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^\alpha}{-\frac{x^4}{6}} = -\infty & \text{se } 0<\alpha<4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{5}{4}x^4}{-\frac{x^4}{6}} = -\dfrac{15}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\frac{x^4}{4}}{-\frac{x^4}{6}} = -\dfrac{3}{2} & \text{se } \alpha > 4 \end{cases}$$

(Se esiste) $\ell_\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<\alpha<4 \\ -\frac{15}{2} & \text{se } \alpha = 4 \\ -\frac{3}{2} & \text{se } \alpha>4 \end{cases}$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \begin{cases} (4-3|x|)\exp\left(-\frac{3}{|x|}\right) & \text{if } x\neq 0, \\ 0 & \text{if } x = 0. \end{cases}$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(4-3x)e^{(-3/x)}}{x} = -3$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)+3x = \lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(1-e^{(-3/x)}\right) + 4e^{(-3/x)}$ $= \lim\limits_{x\to+\infty} 3x\left(\frac{3}{x}\right)+4 = 13 \Rightarrow y = -3x+13$ asintoto obliquo per $x\to+\infty$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(4+3x)e^{(3/x)}}{x} = 3$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-3x = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x\left(e^{(3/x)}-1\right)+4e^{(3/x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3x\left(\frac{3}{x}\right)+4 = 13$ $\Rightarrow y = 3x+13$ asintoto obliquo per $x\to-\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = e^{\left(\frac{-3}{|x|}\right)}\left[\frac{3}{x^2}\,\mathrm{sgn}(x)(4-3|x|) - 3\,\mathrm{sgn}(x)\right] = \frac{3\,\mathrm{sgn}(x)}{x^2}\left(-x^2-3|x|+4\right)e^{\left(\frac{-3}{|x|}\right)}$$

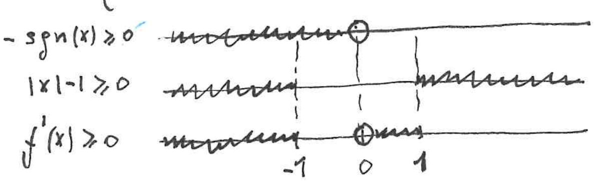
e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

• $x^2+3|x|-4 = (|x|+4)(|x|-1) \Rightarrow f'(x)\geq 0 \iff -\mathrm{sgn}(x)(|x|-1)\geq 0 \iff \begin{cases} 0<x\leq 1 & \text{se } x>0 \\ x\leq -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$

$\Rightarrow \{f'\geq 0\} =]-\infty,-1] \cup]0,1]$

$\Rightarrow$ f è monotona crescente su $]-\infty,-1]$ e su $[0,1]$

f è " decrescente su $[-1,0]$ e su $[1,+\infty[$



(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x=0$, $f(0)=0$ è punto di minimo locale, $\nexists$ punti di minimo globale

$x=-1$, $x=1$, $f(-1)=f(1)=e^{-3}$ sono punti di massimo globale

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = \ ]-\infty, e^{-3}]$

e tracciare il grafico approssimativo della funzione.