

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia (II Squadra)

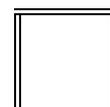
A.A. 2009/2010, 1 Febbraio 2010

Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



N.B. *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE.**

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^{\operatorname{sen} x} - 1}{x \ln(x^2)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $x^{\operatorname{sen} x} - 1$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(1 - \frac{\alpha}{3n}\right)^{n^2}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right).$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^{e^x - 1} \ln(1 + |t|) dt$$

e si determini:

- (i) l'insieme dei punti di continuità di f ;

- (ii) l'insieme dei punti di derivabilità di f

e se ne calcoli la derivata

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} - \frac{y \operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos^2 x} = \operatorname{sen} x. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$, $x > 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} - \frac{y \operatorname{sen}(2x)}{1 + \cos^2 x} = \operatorname{sen} x, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x, y) = e^{xy} - (1 + x^2)y^2.$$

- (i) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x, y) =$$

$$f_y(x, y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f :

- (ii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

- (iii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 0, 1)$: