I APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia (II Squadra)

A.A. 2009/2010, 1 Febbraio 2010

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{x^{(\cos x - 1)} - 1}{x^2 \ln(x^3)} .$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $x^{(\cos x-1)} - 1$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^n \left(1 + \frac{\alpha}{5n^2}\right)^{n^3}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x \ln x}{1 - \ln x}\,.$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

(v) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_0^{\mathrm{senh}(x)} \mathrm{settsenh}(|t|)dt$$

e si determini:

(i) l'insieme dei punti di continuità di f;

(ii) l'insieme dei punti di derivabilità di f

e se ne calcoli la derivata

$f'(x) =$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} + \frac{y\ \mathrm{sen}(2x)}{1 + \mathrm{sen}^2 x} = \cos x\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$\varphi_c(x) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_c(x) =$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$, $x > 0$, del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} + \dfrac{y\ \mathrm{sen}(2x)}{1 + \mathrm{sen}^2 x} = \cos x\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

$\psi(x) =$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = e^{xy} + (1+y^2)x^2 \,.$$

(i) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x,y) =$$

$$f_y(x,y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f:

(ii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f .

(iii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(1,0,2)$: