

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (V Canale)

A.A. 2011/2012, 31 Gennaio 2012

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

N.B. *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE.**

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - x \ln x - 1}{(\sin x)^2 (\ln x)^2}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $x^x - x \ln x - 1$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^3 \left[\left(\frac{32n^\alpha + 1}{n^\alpha} \right)^{1/5} - 2 \right]$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \tanh(|3x^2 + 14x - 5|).$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [7 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{x|x^2-3|} \frac{e^{-t}}{1+|t|} dt$.

(i) Determinare l'insieme dei punti di derivabilità di f

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(iii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - xe^{-\sqrt{1+x^2}}. \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{xy}{\sqrt{1+x^2}} - xe^{-\sqrt{1+x^2}}, \\ y(0) = e/2, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{\tan x} |\ln x|^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.