I APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)
A.A. 2012/2013, 30 Gennaio 2013
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n\to\infty} n^3 \left[\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) + e^{-n} - 1 \right].$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2n}}\right) + \cos\left(\frac{1}{n}\right) + e^{-n} - 1$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha e^{(2-\alpha)n}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(e^{\frac{1}{x}}\right) - x$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) =$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$f'(x) =$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

(vi) Determinare quanti zeri ha la funzione f (quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$) :

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{e^{-x}}^{e^{x}} (\ln t)^3 \, dt$.

(i) Calcolare la derivata prima della funzione

$f'(x) =$

(ii) Calcolare il limite $\ell \doteq \lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^5}$ (fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$\ell =$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y\,\mathrm{sen}x}{1+\cos^2 x} + 3\,e^{-\arctan(\cos x)}\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$\varphi_c(x) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_c(x) =$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{y\,\mathrm{sen}x}{1+\cos^2 x} + 3\,e^{-\arctan(\cos x)}\,, \\ y(\pi/2) = 2\pi\,, \end{cases}$$

$\psi(x) =$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^\alpha \sqrt{1-x}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.