

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)

A.A. 2012/2013, 30 Gennaio 2013

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

N.B. *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla SECONDA PROVA PARZIALE.*

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left[\frac{2}{n} + e^{-n^2} - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) - \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3n^2}} \right) \right].$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $\frac{2}{n} + e^{-n^2} - 2 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n} \right) - \ln \left(\left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{3n^2}} \right)$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{(\alpha-3)n}}{n^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \operatorname{arccot}(e^{\frac{1}{x}}) + x$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\operatorname{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f : $\operatorname{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare quanti zeri ha la funzione f (quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$) :

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{\arctan(\frac{1}{x})}^{\arctan(x)} (\tan t)^3 dt$.

- (i) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

- (ii) Calcolare il limite $\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1}$ (fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{y e^x}{1 + e^{2x}} - 5 e^{\arctan(e^x)}. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{y e^x}{1 + e^{2x}} - 5 e^{\arctan(e^x)}, \\ y(0) = 5, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{x^\alpha \ln(1-x^2)}{\sqrt[3]{1-x}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.