

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)

A.A. 2013/2014, 30 Gennaio 2014

Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

N.B. *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla SECONDA PROVA PARZIALE.*

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)}{\tan\left(\frac{1}{n^4}\right)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $\left(\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) - \sin^2\left(\frac{1}{n}\right) \right)$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$\ell =$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\alpha}}{\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^{(x - \sqrt{|1-x^2|})}$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$.

(i) Determinare se ammette asintoti verticali

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y y' = (y^2 - 1) \cos x. \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y y' = (y^2 - 1) \cos x, \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{\text{sen}(1-x^2)}{|\ln x|^\alpha}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.