

I APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)

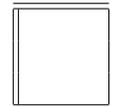
A.A. 2013/2014, 30 Gennaio 2014

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



N.B. *Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla SECONDA PROVA PARZIALE.*

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + 2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^6}\right)}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $\cos\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 + 2\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right)^2$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(\sqrt[n]{n^\alpha + 1} - \sqrt[n]{n^\alpha})$$

al variare del parametro $\alpha > 0$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = e^{(\sqrt{|1-x^2|}-2x)}$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\arctan(t)}{t} dt$.

- (i) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività, specificando le argomentazioni principali.

$$\{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \geq 0\} =$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e determinare se la funzione $f(x)$ ammette asintoti orizzontali od obliqui (fornendo le argomentazioni).

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = 2\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1)\sin x. \tag{1}$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y}(\sqrt{y} - 1)\sin x, \\ y(\pi/2) = 1/4. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\ln x|^\alpha}{x^2 - 1} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.