I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 20 Gennaio 2022

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* SECONDA PROVA PARZIALE.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{3}\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\lim_n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{3}\right)} \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{3}\right)}}{n!}$. Utilizziamo il criterio del rapporto: $\lim_n \frac{(n+1)^{\left(\frac{n+1}{3}\right)}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^{\left(\frac{n}{3}\right)}} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\left(\frac{n}{3}\right)} \cdot \frac{(n+1)^{1/3}}{(n+1)} = \lim_n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{1/3} \cdot \frac{1}{(n+1)^{2/3}} = e^{1/3} \cdot 0 = 0 < 1$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\left(\frac{n}{3}\right)} \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n!}$ è convergente per il criterio del rapporto.

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \to 0+} \frac{\exp(x - x^2) - \cos(\alpha x) - x}{\sinh(x) - x}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di: $\exp(x - x^2) - \cos(\alpha x) - x$, ed il limite ℓ_α, fornendo le argomentazioni principali.

$$e^{(x-x^2)} - \cos(\alpha x) - x = 1 + (x - x^2) + \frac{(x-x^2)^2}{2} + \frac{(x-x^2)^3}{6} + o(x^3) - 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2} + o(x^3) - x$$

$$= -\frac{x^2}{2} - x^3 + \frac{x^3}{6} + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + o(x^3) = \frac{\alpha^2 - 1}{2} x^2 - \frac{5}{6} x^3 + o(x^3)$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha^2-1}{2} x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq -1, 1 \\ -\frac{5}{6} x^3 + o(x^3) & \text{se } \alpha = -1, +1 \end{cases}$$

$$\operatorname{senh}(x) - x = \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$\exp(x - x^2) - \cos(\alpha x) - x =$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } |\alpha| > 1 \\ -\infty & \text{se } |\alpha| < 1 \\ -5 & \text{se } \alpha = -1, 1 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\dfrac{e^{-2x}}{|e^x - 2|}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x \to \ln 2} f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \ln 2$ è discontinuità eliminabile

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{1}{\left(1 + \frac{e^{-4x}}{|e^x - 2|^2}\right)} \cdot \frac{\left(-2e^{-2x}|e^x-2| - e^{-2x} \cdot e^x \cdot \mathrm{sgn}(e^x-2)\right)}{|e^x-2|^2} = \frac{e^{-2x}\,\mathrm{sgn}(e^x-2)(4-3e^x)}{|e^x-2|^2 + e^{-4x}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff (e^x - 2)(4 - 3e^x) \geq 0 \Rightarrow \{f' \geq 0\} = [\ln(\frac{4}{3}), \ln 2[\Rightarrow$

f è crescente su $[\ln(\frac{4}{3}), \ln 2[$

f è monotona decrescente su $]-\infty, \ln(\frac{4}{3})]$ e su $]\ln 2, +\infty[$

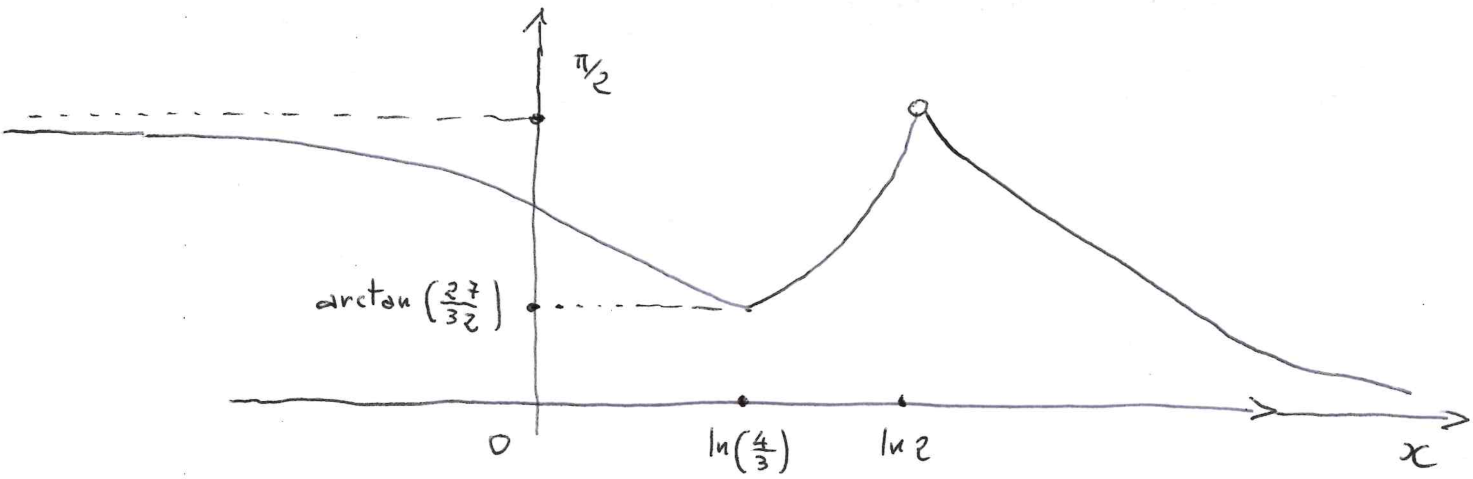
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = \ln(\frac{4}{3})$ è punto di minimo relativo, non globale, $f(\ln(\frac{4}{3})) = \arctan\left(\frac{27}{32}\right)$

$\nexists$ punti di massimo relativo o globale

(v) Determinare l'immagine di f: $\mathrm{Im}(f) = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(\cosh x))^\alpha}{x^x}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(\cosh x))^\alpha}{x^x} dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{(\ln(\cosh x))^\alpha}{x^x} dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln(\cosh x))^\alpha}{x^x} dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^1 (\ln(\cosh x))^\alpha dx = \int_0^1 (\ln(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)))^\alpha dx \sim \int_0^1 x^{2\alpha} dx$ convergente $\Leftrightarrow -2\alpha < 1 \Leftrightarrow \alpha > -\frac{1}{2}$

$\left(\lim_{x\to 0} x^x = 1\right) \Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > -\frac{1}{2} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

ii) $I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{\left(\ln\left(e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right)\right)^\alpha}{x^x} dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{x^x} dx$, confronto asintotico con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{x^x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{(x-\alpha-2)}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{(x-\alpha-2)\ln x}} = 0 \Rightarrow I_2 \text{ è convergente } \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

i) e ii) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(\cosh x))^\alpha}{x^x} dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > -\frac{1}{2} \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = xy\ln y\,, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Soluzioni costanti: $\varphi_1(x) = 1$
- Soluzioni non costanti soddisfano: $\int \frac{dy}{y \cdot \ln y} = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ln|\ln y| = \frac{x^2}{2} + c_1 \Rightarrow |\ln y| = c_2 e^{\frac{x^2}{2}}, \ c_2 > 0 \Rightarrow \ln y = c_3 e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}, \ c_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$\Rightarrow y = e^{\left(c_3 \cdot e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right)}, \ c_3 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Soluzioni non costanti di (1) sono:

$$\varphi_2(x;c) = e^{\left(c\, e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right)}, \quad c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy\ln y\,, \\ y(0) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$e^{-1} = \varphi_2(0;c) = e^c \Rightarrow c = -1$

$$\varphi(x) = e^{\left(-e^{\left(\frac{x^2}{2}\right)}\right)}.$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' - 3y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4}}{1} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$

$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 2y' - 3y = 4\,e^{-x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = Kx e^{-x}$

$\Psi'(x) = e^{-x}(K - Kx)$, $\Psi''(x) = e^{-x}(-2K + Kx) \Rightarrow$

$\Psi''(x) - 2\Psi'(x) - 3\Psi(x) = e^{-x}(-2K + Kx - 2K + 2Kx - 3Kx) = -4K e^{-x}$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = -1$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -x e^{-x}$

$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = (-x + c_1) e^{-x} + c_2 e^{3x}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 4\,e^{-x}\,, \\ y(0) = 2, \qquad y'(0) = -3\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi'(c_1, c_2; x) = (x - 1 - c_1) e^{-x} + 3 c_2 e^{3x}$

$2 = \psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2$, $-3 = \psi'(c_1, c_2; 0) = -1 - c_1 + 3c_2 \Rightarrow c_2 = 2 - c_1$

$-3 = -1 - c_1 + 6 - 3c_1 \Rightarrow -4c_1 = -8 \Rightarrow c_1 = 2$, $c_2 = 0$

$$\boxed{\psi(x) = (2 - x)\, e^{-x}}$$