I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 20 Gennaio 2022

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{n! \cdot \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\left(\frac{n}{4}\right)}}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\lim_n \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\left(\frac{n}{4}\right)}}$ ha lo stesso comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^{\left(\frac{n}{4}\right)}}$. Utilizziamo il criterio del rapporto: $\lim_n \frac{(n+1)!}{(n+1)^{\left(\frac{n+1}{4}\right)}} \cdot \frac{n^{\left(\frac{n}{4}\right)}}{n!} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{\left(\frac{n}{4}\right)} \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)^{1/4}} = \lim_n \left(\underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e}\right)^{-1/4} (n+1)^{3/4} = +\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \cos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^{\left(\frac{n}{4}\right)}}$ è divergente a $+\infty$ per il criterio del rapporto.

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \to 0+} \frac{x + \cosh(\alpha x) - \exp(x + 4x^2)}{\sin(x) - x}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di: $x + \cosh(\alpha x) - \exp(x + 4x^2)$, ed il limite ℓ_α, fornendo le argomentazioni principali.

$$x + \cosh(\alpha x) - e^{(x+4x^2)} = x + 1 + \frac{(\alpha x)^2}{2} + o(x^3) - 1 - x - 4x^2 - \frac{(x+4x^2)^2}{2} - \frac{(x+4x^2)^3}{6} + o(x^3)$$

$$= \frac{(\alpha x)^2}{2} - 4x^2 - \frac{x^2}{2} - 4x^3 - \frac{x^3}{6} + o(x^3) = -\frac{9}{2}x^2 + \frac{(\alpha x)^2}{2} - \frac{25}{6}x^3 + o(x^3) =$$

$$= \begin{cases} \frac{\alpha^2 - 9}{2} x^2 + o(x^2) & \text{se } |\alpha| \neq 3 \\ -\frac{25}{6} x^3 + o(x^3) & \text{se } \alpha = -3, 3 \end{cases}$$

$$\operatorname{sen} x - x = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$x + \cosh(\alpha x) - \exp(x + 4x^2) =$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{se } |\alpha| > 3 \\ +\infty & \text{se } |\alpha| < 3 \\ 25 & \text{se } \alpha = -3, 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \operatorname{arccot}\left(\dfrac{e^{-3x}}{|e^x - 3|}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 3\}$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$\lim_{x \to \ln 3} f(x) = 0 \Rightarrow x = \ln 3$ è discontinuità eliminabile

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale per $x \to -\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{-1}{\left(1 + \frac{e^{-6x}}{|e^x - 3|^2}\right)} \cdot \frac{\left(-3e^{-3x}|e^x - 3| - e^{-3x} \cdot e^x \operatorname{sgn}(e^x - 3)\right)}{|e^x - 3|^2} = \frac{e^{-3x} \operatorname{sgn}(e^x - 3)(4e^x - 9)}{|e^x - 3|^2 + e^{-6x}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff (e^x - 3)(4e^x - 9) \geq 0 \Rightarrow \{f' \geq 0\} =]-\infty, \ln(\frac{9}{4})] \cup]\ln 3, +\infty[\Rightarrow$

f è crescente su $]-\infty, \ln(\frac{9}{4})]$ e su $]\ln 3, +\infty[$

f è monotona decrescente su $[\ln(\frac{9}{4}), \ln 3[$

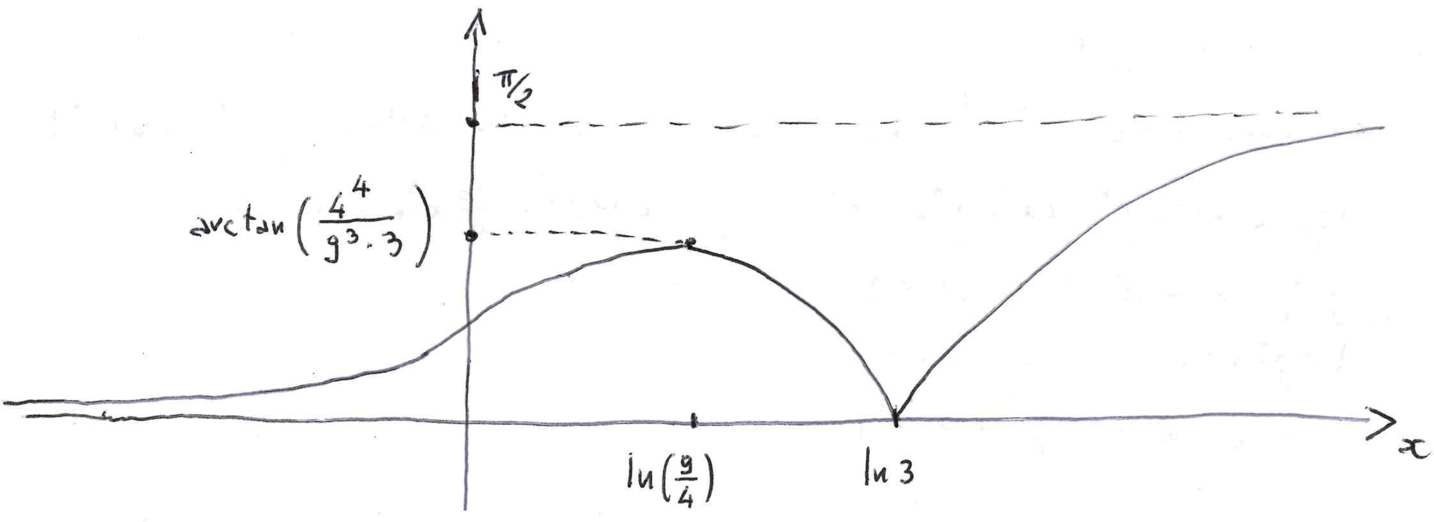
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = \ln(\frac{9}{4})$ è punto di massimo relativo, non globale $f(\ln(\frac{9}{4})) = \operatorname{arccot}\left(\frac{4^4}{9^3 \cdot 3}\right)$

$\nexists$ punti di minimo relativo (o globale)

(v) Determinare l'immagine di f: $\mathrm{Im}(f) =]0, \frac{\pi}{2}[$ $\qquad \operatorname{arccot}(0) = \frac{\pi}{2}$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}}\, dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{x^{\alpha x}\, dx}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}}\, dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{\ln(1+\frac{x^2}{2}+o(x^2))}} \sim \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ convergente $\Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\left(\lim_{x\to 0} x^{\alpha x} = 1\right)$ ii) $I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}\, dx}{\sqrt[4]{\ln\left(e^x\left(\frac{1+e^{-2x}}{2}\right)\right)}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}\, dx}{\sqrt[4]{x}}$

- Se $\alpha \geq 0$, $\int_1^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{\sqrt[4]{x}}\, dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$ divergente a $+\infty$ $\Rightarrow I_2$ è divergente a $+\infty$ $\forall \alpha \geq 0$
- Se $\alpha < 0$, confronto asintotico con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ che è convergente: $\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^{\alpha x}}{x^{1/4}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} x^{(\alpha x - 1/4 + 2)} =$

$= \lim_{x\to+\infty} e^{\underbrace{(\alpha x + 7/4)\cdot \ln x}_{-\infty}} = 0 \Rightarrow I_2$ è convergente $\forall \alpha < 0$.

i) e ii) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha x}}{\sqrt[4]{\ln(\cosh x)}}\, dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < 0 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 0. \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = xy\,(\ln y)^2\,, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Soluzioni costanti: $\varphi_1(x) = 1$
- Soluzioni non costanti sodolisfano: $\int \frac{dy}{y(\ln y)^2} = \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow -\frac{1}{\ln y} = \frac{x^2+c_2}{2}$, $c_2 \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \ln y = -\frac{2}{x^2+c_2}$ $\Rightarrow y = e^{\frac{-2}{x^2+c_2}}$, $c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Soluzioni non costanti di (1) sono:

$\varphi_2(x; c) = e^{\frac{-2}{x^2+c}}$, $c \in \mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = xy\,(\ln y)^2\,, \\ y(0) = \dfrac{1}{e} \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$e^{-1} = \varphi_2(0; c) = e^{-\frac{2}{c}} \Rightarrow c = 2$

$\varphi(x) = e^{\frac{-2}{x^2+2}}$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + 3y' - 10y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda - 10$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

$\phi(c_1, c_2; x) =$ $c_1 e^{-5x} + c_2 e^{2x}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' + 3y' - 10y = 21\, e^{2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K x e^{2x}$

$\Psi'(x) = e^{2x}(K + 2Kx)$, $\Psi''(x) = e^{2x}(4K + 4Kx) \Rightarrow$

$\Psi''(x) + 3\Psi'(x) - 10\Psi(x) = e^{2x}(4K + 4Kx + 3K + 6Kx - 10Kx) = 7K e^{2x}$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = 3$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = 3x e^{2x}$

$\psi(c_1, c_2; x) =$ $\Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-5x} + (c_2 + 3x) e^{2x}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 3y' - 10y = 21\, e^{2x}, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = -2. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi'(c_1, c_2; x) = -5c_1 e^{-5x} + (3 + 2c_2 + 6x) e^{2x}$

$1 = \psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2$, $-2 = \psi'(c_1, c_2; 0) = -5c_1 + 3 + c_2 \Rightarrow c_2 = 1 - c_1$,

$-2 = -5c_1 + 3 + 1 - c_1 \Rightarrow 6c_1 = 6 \Rightarrow c_1 = 1$; $c_2 = 0$

$\boxed{\psi(x) = e^{-5x} + 3x e^{2x}}$