I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2022/2023, 24 Gennaio 2023

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\,2^{(2n)}}{(6+\cos n)^n}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- $\dfrac{n\,2^{(2n)}}{(6+\cos n)^n} \leq \dfrac{n\,4^n}{5^n}$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n$ è convergente per criterio del rapporto:

$$\lim_n \frac{(n+1)\left(\frac{4}{5}\right)^{(n+1)}}{n\left(\frac{4}{5}\right)^n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot\frac{4}{5} = \frac{4}{5} < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,2^{(2n)}}{(6+\cos n)^n} \text{ è convergente per}$$

confronto con la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\left(\frac{4}{5}\right)^n$

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\exp\left(-(\sinh x)^2\right) - \cos(\alpha x)}{(1-\cos x)\,x^{(\alpha^2)}}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\exp\left(-(\sinh x)^2\right) - \cos(\alpha x) = \begin{cases} \left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \\ o(x^4) & \text{se } \alpha = -\sqrt{2},\ o\ \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$$

e di:

$$(1-\cos x)\,x^{(\alpha^2)} = \frac{x^{(2+\alpha^2)}}{2} + o\left(x^{(2+\alpha^2)}\right)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- $e^{(-\operatorname{senh}^2 x)} = 1 - \operatorname{senh}^2 x + \dfrac{\operatorname{senh}^4 x}{2} + o(\operatorname{senh}^4 x) = 1 - \left(x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$

$$= 1 - x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

- $\cos(\alpha x) = 1 - \dfrac{\alpha^2}{2}x^2 + \dfrac{\alpha^4}{24}x^4 + o(x^4)$

$$\Rightarrow e^{(-\operatorname{senh}^2 x)} - \cos(\alpha x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{6} - 1 + \frac{\alpha^2}{2}x^2 - \frac{\alpha^4}{24}x^4 + o(x^4) = \left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\alpha^4}{4}\right)x^4 + o(x^4)$$

- $(1-\cos x)\,x^{(\alpha^2)} = \left(1 - 1 + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right)x^{(\alpha^2)} = \dfrac{x^2}{2}\cdot x^{(\alpha^2)} + o\left(x^{(2+\alpha^2)}\right)$

$$\ell_\alpha = \lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\frac{\alpha^2}{2}-1\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\alpha^4}{4}\right)x^4 + o(x^4)}{\frac{x^{(2+\alpha^2)}}{2}}$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} -2 & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ -\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2},\ \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = -\sqrt{2} \text{ o } \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = |x-2| \exp\left(\dfrac{1}{x-2}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$y = x - 1$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$y = -x + 1$ " " per $x \to -\infty$

$x = 2$ asintoto verticale unilatero da destra ($\lim_{x \to 2^-} f(x) = 0$, $\lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$)

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-2)\, e^{\frac{1}{(x-2)}} + |x-2|\, e^{\frac{1}{(x-2)}} \left(\frac{-1}{(x-2)^2}\right) = \frac{x-3}{|x-2|}\, e^{\frac{1}{(x-2)}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$\{f' \geq 0\} = [3, +\infty[\implies$

f è monotona crescente su $[3, +\infty[$

f è monotona decrescente su $]-\infty, 2[$ e su $]2, 3]$

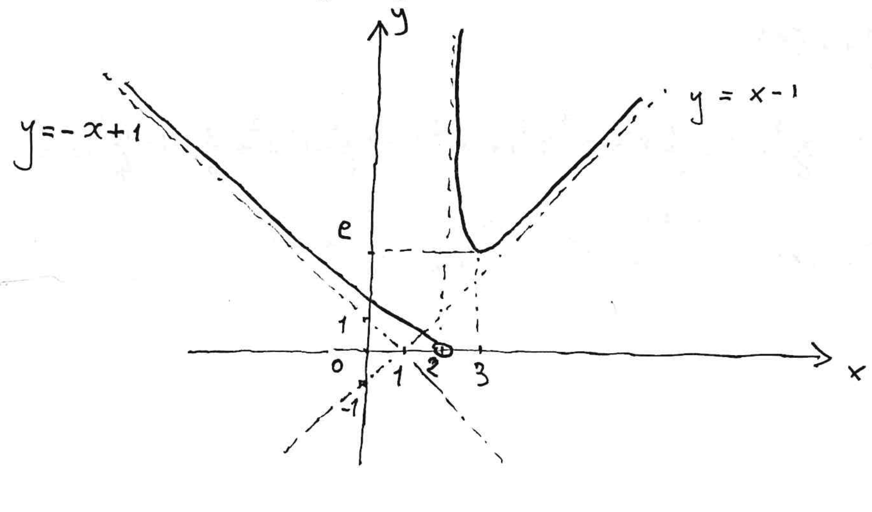
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = 3$ punto di minimo relativo, non assoluto, $f(3) = e$

$\nexists$ punti di massimo relativo (o assoluto)

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]0, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right) \left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| \, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right)\left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_1^2 \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right)\left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right)\left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx$$

i) $I_1 \sim \int_1^2 \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right) dx$, Se $\alpha \geq 0$ $\lim_{x \to 1^+} \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 0 \\ 1 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow I_1$ è convergente

Se $\alpha < 0$ $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{\exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right)}{\frac{1}{x-1}} \underset{\left(y = \frac{1}{x-1}\right)}{=} \lim_{y \to +\infty} \dfrac{\exp(-\alpha y)}{y} = +\infty$, $\int_1^2 \frac{1}{x-1} dx$ divergente a $+\infty$

$\Rightarrow I_1$ divergente a $+\infty$ per criterio confronto asintotico $\Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha \geq 0 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha < 0 \end{cases}$

ii) $I_2 \sim \int_2^{+\infty} \left|\text{sen}\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx$. Se $\alpha < 0$ I_2 è indeterminato, $I_2 \geq 0 \Rightarrow I_1 + I_2$ divergente a $+\infty$

Se $\alpha = 0$, $\int_2^{+\infty} \text{sen}(1)\, dx$ è divergente a $+\infty$. Se $\alpha > 0$, $I_2 \sim \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ convergente $\Leftrightarrow \alpha > 1$

$\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{indeterminato se } \alpha < 0 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \text{convergente se } \alpha > 1 \end{cases} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{1-x}\right)\left|\sin\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)\right| dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha > 1 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq 1 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$\exp(y^2)\, y' = \frac{x}{y}, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Non esistono soluzioni costanti
- Soluzioni non costanti: $\int e^{(y^2)} y \, dy = \int x \, dx \Rightarrow \frac{e^{(y^2)}}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1, \ c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{(y^2)} = x^2 + c_2, \ c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 = \ln(x^2 + c_2), \ x^2 + c_2 > 0, \ c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$y = \pm\sqrt{\ln(x^2+c_2)}, \ x^2 + c_2 \geq 1, \ c_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Integrale generale è: $\varphi_1(x; c) = \sqrt{\ln(x^2+c)}, \ x^2 + c \geq 1, \ c \in \mathbb{R}$

$\varphi_2(x; c) = -\sqrt{\ln(x^2+c)}, \ x^2 + c \geq 1, \ c \in \mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \exp(y^2)\, y' = \frac{x}{y}, \\ y(0) = -1, \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$-1 = \varphi_2(0; c) = -\sqrt{\ln c} \Rightarrow \ln c = 1 \Rightarrow c = e$

$\varphi(x) = -\sqrt{\ln(x^2+e)}, \quad x \in \mathbb{R}.$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - y' - 2y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$.

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

$\phi(c_1, c_2; x) =$ $c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - y' - 2y = -3\, e^{2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = Kx\, e^{2x}$

$\Psi'(x) = e^{2x}(K + 2Kx)$, $\Psi''(x) = e^{2x}(4K + 4Kx) \Rightarrow$

$\Psi''(x) - \Psi'(x) - 2\Psi(x) = e^{2x}(4K + 4Kx - K - 2Kx - 2Kx) = 3K e^{2x}$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = -1$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -x\, e^{2x}$

$\psi(c_1, c_2; x) =$ $c_1 e^{-x} + (c_2 - x) e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = -3\, e^{2x}, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 4. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = -c_1 e^{-x} + (2c_2 - 1 - 2x) e^{2x}$

$1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2$, $4 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = -c_1 + 2c_2 - 1 \Rightarrow$

$c_2 = 1 - c_1$, $-c_1 + 2 - 2c_1 - 1 = 4 \Rightarrow 3c_1 = -3 \Rightarrow c_1 = -1$, $c_2 = 2$

$\psi(x) =$ $-e^{-x} + (2 - x) e^{2x}$