# I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

**Ing. Aerospaziale (Canale A)**

**A.A. 2022/2023, 24 Gennaio 2023**

**Tema 2**

COGNOME E NOME: ..........................................................................

MATRICOLA: ......................................

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**N.B.** *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

**ESERCIZIO 1.** [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n + 11)^n}{3^{(2n)}\, n^2}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

• $\frac{(\sin n + 11)^n}{3^{(2n)}\, n^2} \geq \frac{10^n}{9^n\, n^2}$ , $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ è divergente a $+\infty$ per criterio del rapporto:

$$\lim_n \frac{\left(\frac{10}{9}\right)^{(n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)^2}}{\left(\frac{10}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}} = \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{10}{9} = \frac{10}{9} > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin n + 11)^n}{3^{(2n)}\, n^2} \text{ è divergente a } +\infty$$

per confronto con la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{10}{9}\right)^n \cdot \frac{1}{n^2}$

**ESERCIZIO 2.** [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \frac{\exp\left((\sin x)^2\right) - \cosh(\alpha x)}{(\cosh x - 1)\, x^{(\alpha^2)}}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\exp\left((\sin x)^2\right) - \cosh(\alpha x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) x^2 + o(x^2) & \text{se } \alpha \neq -\sqrt{2}, \sqrt{2} \\ o(x^4) & \text{se } \alpha = -\sqrt{2}, \text{ o } \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$$

e di:

$$(\cosh x - 1)\, x^{(\alpha^2)} = \frac{x^{(2+\alpha^2)}}{2} + o\left(x^{(2+\alpha^2)}\right)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$$\bullet\ e^{(\text{sen}^2 x)} = 1 + \text{sen}^2 x + \frac{\text{sen}^4 x}{2} + o(\text{sen}^4 x) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4 + o(x^4)$$

$$= 1 + x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} + o(x^4) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} + o(x^4)$$

$$\bullet\ \cosh(\alpha x) = 1 + \frac{\alpha^2}{2} x^2 + \frac{\alpha^4}{24} x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow e^{(\text{sen}^2 x)} - \cosh(\alpha x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{6} - 1 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 - \frac{\alpha^4}{24} x^4 + o(x^4) = \left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) x^2 + \frac{1}{6}\left(1 - \frac{\alpha^4}{4}\right) x^4 + o(x^4)$$

$$\bullet\ (\cosh x - 1)\, x^{(\alpha^2)} = \left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1\right) x^{(\alpha^2)} = \frac{x^2}{2} \cdot x^{(\alpha^2)} + o\left(x^{(2+\alpha^2)}\right)$$

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1-\frac{\alpha^2}{2}\right)x^2 + \frac{1}{6}\left(1-\frac{\alpha^4}{4}\right)x^4 + o(x^4)}{\frac{x^{(2+\alpha^2)}}{2}}$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} 2 & \text{se } \alpha = 0 \\ -\infty & \text{se } |\alpha| > \sqrt{2} \\ +\infty & \text{se } |\alpha| < \sqrt{2},\ \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = -\sqrt{2} \text{ o } \alpha = \sqrt{2} \end{cases}$$

**ESERCIZIO 3.** [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = (x+3)\exp\left(\frac{1}{|x+3|}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$x = -3$ asintoto verticale bilatero $\left(\lim_{x\to -3^-} f(x) = -\infty,\ \lim_{x\to -3^+} f(x) = +\infty\right)$

$y = x + 4$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

$y = x + 2$ " " per $x \to -\infty$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = e^{\frac{1}{|x+3|}} + (x+3)\,\mathrm{sgn}(x+3)\,e^{\frac{1}{|x+3|}}\left(\frac{-1}{|x+3|^2}\right) = \frac{(|x+3|-1)}{|x+3|}\,e^{\frac{1}{|x+3|}}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff |x+3| \geq 1 \iff x \geq -2$ o $x \leq -4$

$\Rightarrow \{f' \geq 0\} = ]-\infty, -4] \cup [-2, +\infty[ \Rightarrow$

$f$ è monotona crescente in $]-\infty, -4]$ e in $[-2, +\infty[$

$f$ è monotona decrescente in $[-4, -3[$ e in $]-3, -2]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di $f$ ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

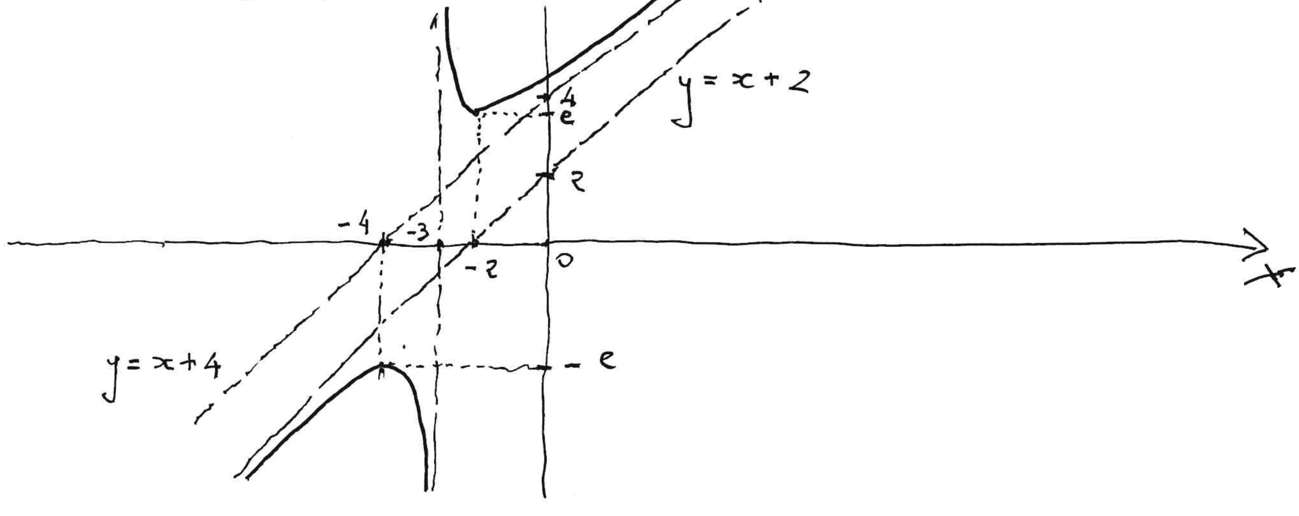
$x = -4$ punto di massimo relativo, $f(-4) = -e$

$x = -2$ punto di minimo relativo, $f(-2) = e$

Non esistono punti di massimo o minimo assoluto

(v) Determinare l'immagine di $f$ : $\mathrm{Im}(f) = ]-\infty, -e] \cup [e, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



**ESERCIZIO 4.** [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right) \sinh(x^\alpha)\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right)\sinh(x^\alpha)\,dx = I_1 + I_2,\quad I_1 = \int_1^2 \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right)\sinh(x^\alpha)\,dx,\quad I_2 = \int_2^{+\infty} \exp(x^\alpha)\,\sinh(x^\alpha)\,dx$$

i) $I_1 \sim \int_1^2 \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right)dx$. Se $\alpha \leq 0$ $\lim_{x\to 1^+} \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha = 0 \\ 0 & \text{se } \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha \leq 0$

Se $\alpha > 0$ $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{\exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right)}{\frac{1}{x-1}} = \lim_{y\to+\infty} \dfrac{\exp(\alpha y)}{y} = +\infty$, $\left(y = \frac{\alpha}{x-1}\right)$, $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ divergente a $+\infty$

$\Rightarrow I_1$ è divergente a $+\infty$ $\forall \alpha > 0$ per confronto asintotico con $\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx \Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha \leq 0 \\ \text{divergente a} +\infty\ \forall \alpha > 0 \end{cases}$

ii) $I_2 \sim \int_2^{+\infty} \sinh(x^\alpha)\,dx$. Se $\alpha \geq 0$, $\lim_{x\to+\infty} \sinh(x^\alpha) = \begin{cases} \sinh(1) & \text{se } \alpha = 0 \\ +\infty & \text{se } \alpha > 0 \end{cases} \Rightarrow I_2$ è divergente a $+\infty$ $\forall \alpha \geq 0$

Se $\alpha < 0$, $I_2 \sim \int_2^{+\infty} x^\alpha\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{(-\alpha)}}\,dx$ convergente $\Leftrightarrow -\alpha > 1 \Leftrightarrow \alpha < -1$

$\Rightarrow I_2$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < -1 \\ \text{divergente a } +\infty\ \forall \alpha \geq -1 \end{cases} \Rightarrow \int_1^{+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{x-1}\right)\sinh(x^\alpha)\,dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < -1 \\ \text{divergente a } +\infty\ \forall \alpha \geq -1 \end{cases}$

**ESERCIZIO 5.** [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$\cos(y^2)\, y' = \frac{x}{y}, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Non esistono soluzioni costanti
- Soluzioni non costanti: $\int \cos(y^2)\,y\,dy = \int x\,dx \Rightarrow \frac{\text{sen}(y^2)}{2} = \frac{x^2}{2} + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \text{sen}(y^2) = x^2 + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow y^2 = \text{arcsen}(x^2 + c_2),\ x^2 + c_2 \in [-1, 1]$

$\Rightarrow y = \pm\sqrt{\text{arcsen}(x^2 + c_2)},\ x^2 + c_2 \in [-1, 1]$

$\Rightarrow$ Integrale generale è: $\varphi_1(x;c) = \sqrt{\text{arcsen}(x^2 + c)},\ x^2 + c \in [-1, 1]$

$\varphi_2(x;c) = -\sqrt{\text{arcsen}(x^2 + c)},\ x^2 + c \in [-1, 1]$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} \cos(y^2)\, y' = \frac{x}{y}, \\ y(0) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \varphi_1(0;c) = \sqrt{\text{arcsen}(c)} \Rightarrow \text{arcsen}(c) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = 1$

$$\varphi(x) = \sqrt{\text{arcsen}(x^2+1)}$$

**ESERCIZIO 6.**

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 3y' - 10y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 10$

Radici di $P(\lambda)$ : $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+40}}{2} = \begin{cases} 5 \\ -2 \end{cases}$

$\phi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{5x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 3y' - 10y = 14\, e^{-2x} \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = Kxe^{-2x}$

$\Psi'(x) = e^{-2x}(K - 2Kx)$, $\Psi''(x) = e^{-2x}(-4K + 4Kx) \Rightarrow$

$\Psi''(x) - 3\Psi'(x) - 10\Psi(x) = e^{-2x}(-4K + 4Kx - 3K + 6Kx - 10Kx) = -7Ke^{-2x}$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K = -2$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -2xe^{-2x}$

$\psi(c_1, c_2; x) = (c_1 - 2x)e^{-2x} + c_2 e^{5x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione $\psi$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 3y' - 10y = 14\, e^{-2x}, \\ y(0) = 3, \qquad y'(0) = -1. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = (-2c_1 - 2 + 4x)e^{-2x} + 5c_2 e^{5x}$

$3 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + c_2$, $-1 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = -2c_1 - 2 + 5c_2 \Rightarrow$

$c_2 = 3 - c_1$, $-1 = -2c_1 - 2 + 15 - 5c_1 \Rightarrow 7c_1 = 14 \Rightarrow c_1 = 2$, $c_2 = 1$

$\psi(x) = 2(1-x)e^{-2x} + e^{5x}$