I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 25 Gennaio 2024

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{(n^{\frac{5}{2}})}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

• $\left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{(n^{5/2})} = e^{\left[n^{(5/2)}\cdot \ln\left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)\right]} \simeq e^{\left[n^{(5/2)}\left(-\frac{1}{n^{(3/2)}}+o\left(\frac{1}{n^{(3/2)}}\right)\right)\right]} = e^{\left[-n+o(n)\right]}$

$\Rightarrow$ Per confronto asintotico $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{(n^{5/2})}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n e^{-n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{e}\right)^n$ serie geometrica di ragione $\frac{3}{e} > 1$ e dunque divergente a $+\infty$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(1-\frac{1}{n^{3/2}}\right)^{(n^{5/2})}$ è divergente a $+\infty$.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \dfrac{2^x - \operatorname{sen}(\alpha x) - 1 + x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{1-\cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x+1)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0+$) di:

$$2^x - \operatorname{sen}(\alpha x) - 1 + x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) = (\ln 2 - \alpha)x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

e di:

$$1 - \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x+1) = \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

• $2^x - 1 - \operatorname{sen}(\alpha x) + x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = e^{(x\cdot\ln 2)} - 1 - \alpha x + o(x^2) = x\cdot \ln 2 + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 - \alpha x + o(x^2)$

$= (\ln 2 - \alpha)x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2 + o(x^2)$

• $1 - \cos(\sqrt{x}) - \frac{1}{2}\ln(x+1) = 1 - \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2)\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$

$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{24} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + o(x^2) = \frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln 2-\alpha)x + \frac{(\ln 2)^2}{2}x^2}{\frac{5}{24}x^2} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \ln 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > \ln 2 \\ \frac{12}{5}(\ln 2)^2 & \text{se } \alpha = \ln 2 \end{cases}$$

(Se esiste)

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < \ln 2 \\ -\infty & \text{se } \alpha > \ln 2 \\ \frac{12}{5}(\ln 2)^2 & \text{se } \alpha = \ln 2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x\ln x}{2\ln x - 1}$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =]0, +\infty[\setminus \{e^{1/2}\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{1/2}\pm} f(x) = \pm\infty \Rightarrow x = e^{1/2}$ è asintoto verticale bilatero
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{2\ln x - 1} = \frac{1}{2}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{2\ln x - 1} - \frac{1}{2}\right)$ $= \lim_{x\to+\infty} x\frac{1}{4\ln x - 2} = +\infty \Rightarrow \nexists$ asintoti obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{\ln x(2\ln x - 1) + (2\ln x - 1) - 2\ln x}{(2\ln x - 1)^2} = \frac{2(\ln x)^2 - \ln x - 1}{(2\ln x - 1)^2} = \frac{(2\ln x + 1)(\ln x - 1)}{(2\ln x - 1)^2}$$

$2z^2 - z - 1 = 2(z-1)\left(z+\frac{1}{2}\right) = (z-1)(2z+1)$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- $f'(x) \geq 0 \iff \ln x \leq -\frac{1}{2}$ oppure $\ln x \geq 1 \iff x \in]0, e^{-1/2}] \cup [e, +\infty[$

$\{f' \geq 0\} =]0, e^{-1/2}[\cup [e, +\infty[\Rightarrow$

- f è monotona crescente su $]0, e^{-1/2}]$ e su $[e, +\infty[$

f è " decrescente su $[e^{-1/2}, e^{1/2}[$ e su $]e^{1/2}, e]$.

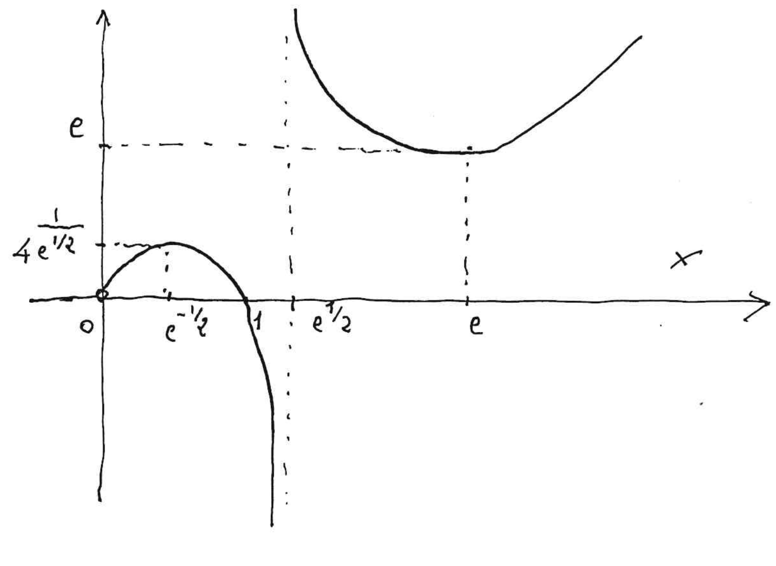
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = e^{-1/2}$ punto di massimo relativo, $f(e^{-1/2}) = \frac{1}{4e^{1/2}}$, $\nexists$ punti di massimo assoluti

$x = e$ punto di minimo relativo, $f(e) = e$, $\nexists$ punti di minimo assoluti

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, \frac{1}{4e^{1/2}}] \cup [e, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen}(x-1)-x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen}(x-1)-x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx = I_1 + I_2,\quad I_1 = \int_1^{2} \frac{1+\operatorname{sen}(x-1)-x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx,\quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen}(x-1)-x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx$$

$$i)\ I_1 \sim \int_1^2 \frac{1-x+\left((x-1)-\frac{(x-1)^3}{6}\right)}{\left(\ln(1+(x-1))\right)^\alpha}\,dx \sim -\int_1^2 \frac{(x-1)^3}{(x-1)^\alpha}\,dx = -\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{(\alpha-3)}}\,dx$$

che è convergente $\Leftrightarrow \alpha-3<1 \Leftrightarrow \alpha<4 \Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha<4 \\ \text{divergente a } -\infty\ \forall \alpha \geq 4 \end{cases}$

$$ii)\ I_2 \sim -\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx = -\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^\alpha}\,dx \text{ che è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>1 \\ \text{divergente a } -\infty\ \forall \alpha\leq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>1 \\ \text{divergente a } -\infty\ \forall \alpha\leq 1 \end{cases}$$

$$i) \text{ e } ii) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1+\operatorname{sen}(x-1)-x}{x^2(\ln x)^\alpha}\,dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha \in\,]1,4[\\ \text{divergente a } -\infty\ \forall \alpha \in\,]-\infty,1] \cup [4,+\infty[\end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\ln x}{e^y}, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Non esistono soluzioni costanti
- Soluzioni non costanti: $\int e^y\,dy = \int \ln x\,dx \Rightarrow e^y = x\ln x - x + c,\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow y = \ln(x\ln x - x + c),\ c\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Integrale generale è $\varphi(x;c) = \ln(x\ln x - x + c),\ c\in\mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $y' = \frac{\ln x}{e^y},\quad y(1)=1.$

(esplicitando i passaggi principali).

$1 = \varphi(1;c) = \ln(-1+c) \Rightarrow -1+c = e \Rightarrow c = e+1$

$\varphi(x) = \ln\left(x\ln x - x + 1 + e\right)$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6\,y' + 10\,y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^{3x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right)$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6\,y' + 10\,y = 5\operatorname{sen}(x) + \cos(x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$

$\Psi'(x) = -K_1 \operatorname{sen} x + K_2 \cos x$, $\Psi''(x) = -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$$\begin{aligned}\Psi''(x) - 6\Psi'(x) + 10\Psi(x) = {} & -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x \\ & - 6K_2 \cos x + 6K_1 \operatorname{sen} x \\ & + 10K_1 \cos x + 10 K_2 \operatorname{sen} x = \end{aligned}$$

$= (9K_1 - 6K_2)\cos x + (9K_2 + 6K_1)\operatorname{sen} x \Rightarrow \Psi$ è soluzione di $(3) \Leftrightarrow$

$9K_1 - 6K_2 = 1$, $9K_2 + 6K_1 = 5 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{6}(9K_1 - 1) = \frac{3}{2}K_1 - \frac{1}{6}$

$\Rightarrow 5 = \frac{27}{2}K_1 - \frac{3}{2} + 6K_1 \Rightarrow \frac{39}{2}K_1 = \frac{13}{2} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow K_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$

$$\boxed{\psi(c_1, c_2; x) = e^{3x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6\,y' + 10\,y = 5\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\,, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^{3x}\left((3c_1 + c_2)\cos x + (3c_2 - c_1)\operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{3}\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$

$1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + \frac{1}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{2}{3}$; $2 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 3c_1 + c_2 + \frac{1}{3} = c_2 + \frac{7}{3}$

$\Rightarrow c_2 = -\frac{1}{3}$

$$\psi(x) = e^{3x}\left(\frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}\operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{3}\cos x + \frac{1}{3}\operatorname{sen} x$$