I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 25 Gennaio 2024

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* SECONDA PROVA PARZIALE.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right)^{(n^{\frac{3}{2}})}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$\cdot\ \left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)^{(n^{3/2})} = e^{\left[n^{(3/2)}\ln\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right]} = e^{\left[n^{3/2}\left(-\frac{1}{n^{1/2}}+o\left(\frac{1}{n^{1/2}}\right)\right)\right]} = e^{(-n+o(n))}$

$\Rightarrow$ Per confronto asintotico $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)^{(n^{3/2})}$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n e^{-n} =$

$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{e}\right)^n$ serie geometrica di ragione $\frac{2}{e}<1$ e dunque convergente

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(1-\frac{1}{n^{1/2}}\right)^{(n^{3/2})}$ è convergente.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to 0+} \dfrac{1+\sinh(\alpha x) - 3^x + x^4\cos(\frac{1}{x})}{\cosh(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{2}\ln(1-x)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0+$) di:

$$1+\sinh(\alpha x) - 3^x + x^4\cos(\frac{1}{x}) = (\alpha - \ln 3)x - \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + o(x^2)$$

e di:

$$\cosh(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{2}\ln(1-x) = -\frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

$\cdot\ 1-3^x+\sinh(\alpha x)+x^4\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 1-e^{(x\cdot\ln 3)} + \alpha x + o(\alpha^2x^2) + o(x^3) = -x\ln 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + o(x^2) + \alpha x + o($

$= (\alpha - \ln 3)x - \frac{(\ln 3)^2}{2}x^2 + o(x^2)$

$\cdot\ \cosh(\sqrt{x}) - 1 + \frac{1}{2}\ln(1-x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} + o(x^2) - 1 + \frac{1}{2}\left(-x - \frac{(-x)^2}{2} + o(x^2)\right) =$

$= \frac{x}{2} + \frac{x^2}{24} - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + o(x^2) = -\frac{5}{24}x^2 + o(x^2)$

$$\ell_\alpha = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\alpha-\ln 3)x - \frac{(\ln 3)}{2}x^2}{-\frac{5}{24}x^2} = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > \ln 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha < \ln 3 \\ \frac{12}{5}(\ln 3)^2 & \text{se } \alpha = \ln 3 \end{cases}$$

(Se esiste)
$$\ell_\alpha = \begin{cases} -\infty & \text{se } \alpha > \ln 3 \\ +\infty & \text{se } \alpha < \ln 3 \\ \frac{12}{5}(\ln 3)^2 & \text{se } \alpha = \ln 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x\ln x}{9-4\ln x}$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =]0, +\infty[\setminus \{e^{9/4}\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to e^{9/4}\pm} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = e^{9/4}$ è asintoto verticale bilatero
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{4}$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) + \frac{x}{4} = \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{9-4\ln x} + \frac{1}{4}\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x}{36-16\ln x} = -\infty$.

$\Rightarrow \nexists$ asintoti obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{\ln(x)(9-4\ln x) + (9-4\ln x) + 4\ln x}{(9-4\ln x)^2} = \frac{-4(\ln x)^2 + 9\ln x + 9}{(9-4\ln x)^2} = \frac{(4\ln x+3)(3-\ln x)}{(9-4\ln x)^2}$$

$$\boxed{-4z^2 + 9z + 9 = (4z+3)(3-z)}$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- $f'(x) \geq 0 \iff -\frac{3}{4} \leq \ln x \leq 3 \iff x \in [e^{-3/4}, e^{9/4}[\cup]e^{9/4}, e^3] \Rightarrow$

$\{f' \geq 0\} = [e^{-3/4}, e^{9/4}[\cup]e^{9/4}, e^3] \Rightarrow$

- f è monotona crescente su $[e^{-3/4}, e^{9/4}[$ e su $]e^{9/4}, e^3]$

f è monotona decrescente su $]0, e^{-3/4}]$ e su $[e^3, +\infty[$

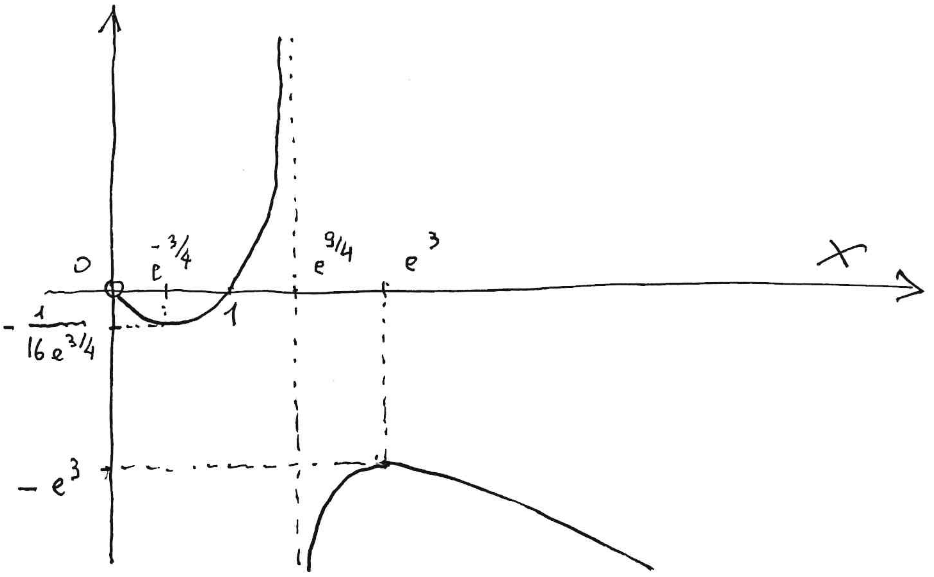
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$x = e^{-3/4}$ punto di minimo relativo, $f(e^{-3/4}) = \frac{-1}{16e^{3/4}}$, $\nexists$ punti di minimo assoluti

$x = e^3$ punto di massimo relativo, $f(e^3) = -e^3$, $\nexists$ punti di massimo assoluti

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =]-\infty, -e^3] \cup [\frac{-1}{16e^{3/4}}, +\infty[$.

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\sinh(x-1)-x}{x\,e^x\,(\ln x)^\alpha}\,dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1+\sinh(x-1)-x}{xe^x(\ln x)^\alpha}\,dx = I_1 + I_2,\quad I_1 = \int_1^{2} \frac{1+\sinh(x-1)-x}{xe^x(\ln x)^\alpha}\,dx,\quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{1+\sinh(x-1)-x}{xe^x(\ln x)^\alpha}\,dx$$

$$i)\ I_1 \sim \int_1^2 \frac{1-x+\left((x-1)+\frac{(x-1)^3}{6}\right)}{(\ln(1+(x-1)))^\alpha}\,dx \sim \int_1^2 \frac{(x-1)^3}{(x-1)^\alpha}\,dx = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{(\alpha-3)}} \text{ che è convergente } \iff \alpha-3<1 \iff \alpha<4$$

$$\Rightarrow I_1 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha<4 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 4 \end{cases}$$

$$ii)\ I_2 \sim \int_2^{+\infty} \frac{e^x}{xe^x(\ln x)^\alpha}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} \text{ che è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha>1 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \leq 1 \end{cases}$$

$$i) \text{ e } ii) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1+\sinh(x-1)-x}{xe^x(\ln x)^\alpha}\,dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha \in]1,4[\\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \in]-\infty,1] \cup [4,+\infty[\end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = e^y \ln x, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- Non esistono soluzioni costanti
- Soluzioni non costanti: $\int e^{-y}\,dy = \int \ln x\,dx \Rightarrow -e^{-y} = x\ln x - x + c_1,\ c_1 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow e^{-y} = x - x\ln x + c_2,\ c_2 \in \mathbb{R},\ \Rightarrow -y = \ln(x - x\ln x + c_2) \Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{x - x\ln x + c_2}\right)$

$\Rightarrow$ Integrale generale è $\varphi(x;c) = \ln\left(\frac{1}{x - x\ln x + c}\right),\ c \in \mathbb{R}$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $y' = e^y \ln x,\quad y(1) = 0$.

(esplicitando i passaggi principali).

$0 = \varphi(1;c) = \ln\left(\frac{1}{1+c}\right) \Rightarrow 1+c = 1 \Rightarrow c = 0$

$$\varphi(x) = \ln\left(\frac{1}{x - x\ln x}\right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right)$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 2\cos(x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Sol. particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$

$\Psi'(x) = -K_1 \operatorname{sen} x + K_2 \cos x$, $\Psi''(x) = -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x \Rightarrow$

$\Psi''(x) - 4\Psi'(x) + 5\Psi(x) = (-K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x) + (-4K_2 \cos x + 4K_1 \operatorname{sen} x) + (5K_1 \cos x + 5K_2 \operatorname{sen} x)$

$= 4(K_1 - K_2)\cos x + 4(K_1 + K_2)\operatorname{sen} x \Rightarrow \Psi$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K_1 - K_2 = \frac{1}{2}$, $K_1 + K_2 = 0$

$\Rightarrow K_2 = -K_1$, $2K_1 = \frac{1}{2} \Rightarrow K_1 = \frac{1}{4}$, $K_2 = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

$$\psi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 2\cos(x), \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 1. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left((2c_1 + c_2)\cos x + (2c_2 - c_1)\operatorname{sen} x\right) - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$

$$\left.\begin{array}{l} 1 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{4} \\ 1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + \frac{1}{4} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{3}{2} + c_2 - \frac{1}{4} \Rightarrow c_2 = 1 - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\psi(x) = e^{2x}\left(\frac{3}{4}\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x\right) + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} x$$