I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2023/2024, 25 Gennaio 2024

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

N.B. *Gli esercizi n.* **4,5,6** *sono relativi alla* **SECONDA PROVA PARZIALE**.

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^n \left(1 - \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)^{(n^{\frac{5}{2}})}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \to 0+} \frac{2^x - \operatorname{sen}(\alpha\, x) - 1 + x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{1 - \cos(\sqrt{x}\,) - \frac{1}{2}\ln(x+1)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0+$) di:

$$2^x - \operatorname{sen}(\alpha\, x) - 1 + x^3 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) =$$

e di:

$$1 - \cos(\sqrt{x}\,) - \frac{1}{2}\ln(x+1) =$$

(fornendo le argomentazioni principali).

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 3. [*7 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \dfrac{x \ln x}{2 \ln x - 1}$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{1 + \operatorname{sen}(x-1) - x}{x^2 \, (\ln x)^\alpha} \, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale

$$y' = \frac{\ln x}{e^y} \,, \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\quad y' = \dfrac{\ln x}{e^y} \,, \quad y(1) = 1 \,.$

(esplicitando i passaggi principali).

$\varphi(x) =$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6\,y' + 10\,y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\phi(c_1, c_2; x) =$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6\,y' + 10\,y = 5\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x) \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi(c_1, c_2; x) =$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6\,y' + 10\,y = 5\,\mathrm{sen}(x) + \cos(x)\,, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\psi(x) =$