

I APPELLO e SECONDA PROVA PARZIALE di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2024/2025, 20 Gennaio 2025
Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

c decrescente ($\{\frac{\ln n}{n}\}_n$ decrescente)
 $\Rightarrow \{e^{-\frac{3 \ln n}{n}}\}_n$ crescente)
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - (\frac{1}{n^3})^{(1/n)})$ è semplicemente
 convergente per il criterio di
 Leibniz per serie a termini di
 segno alterno

N.B. Gli esercizi n. 4,5,6 sono relativi alla SECONDA PROVA PARZIALE.

ESERCIZIO 1. [4 punti] Studiare la convergenza della serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)}\right)$ specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

- Convergenza assoluta: $\left|1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)}\right| = \left|1 - e^{\frac{\ln(\frac{1}{n^3})}{n}}\right| = \left|1 - e^{-\frac{3 \ln n}{n}}\right| = \frac{3 \ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$
 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)}\right|$ ha lo stesso carattere di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ che è divergente a $+\infty$ per confronto con serie armonica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)}\right)$ non è assolutamente convergente
- Convergenza semplice: $\left\{1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)}\right\}_n$ è infinitesimo ($\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)^{(1/n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$) ed

ESERCIZIO 2. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \geq 0$ il limite $\ell_\alpha = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin(x) - \tan(x)}{1 + \sqrt{\tanh(x^\alpha)} - \exp(x^3)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow 0+$) di:

$$1 + \sqrt{\tanh(x^\alpha)} - \exp(x^3) = \begin{cases} \tanh(1) + o(1) & \text{se } \alpha = 0 \\ x^{(\alpha/2)} + o(x^{(\alpha/2)}) & \text{se } 0 < \alpha < 6 \\ -\frac{x^6}{6} + o(x^6) & \text{se } \alpha = 6 \\ -x^3 + o(x^3) & \text{se } \alpha > 6 \end{cases}$$

e di:

$$\sin(x) - \tan(x) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

- Se $\alpha \neq 0$: $1 + \sqrt{\tanh(x^\alpha)} - e^{(x^3)} = 1 + \sqrt{x^\alpha - \frac{x^{(3\alpha)}}{3} + o(x^{(3\alpha)})} - \left(1 + x^3 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)\right) =$
 $= x^{(\alpha/2)} \sqrt{1 - \frac{x^{(2\alpha)}}{3} + o(x^{(2\alpha)})} - x^3 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) = x^{(\alpha/2)} \left(1 - \frac{x^{(2\alpha)}}{6} + o(x^{(2\alpha)})\right) - x^3 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) =$
 $= x^{(\alpha/2)} - \frac{x^{(\frac{5}{2}\alpha)}}{6} + o(x^{(\frac{5}{2}\alpha)}) - x^3 - \frac{x^6}{6} + o(x^6)$
- $\sin x - \tan x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -\frac{x^3}{6} + o(x^3)$

$$p_\alpha = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{2}}{x^{(\alpha/2)} - x^3 - \frac{x^6}{2}} = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < \alpha < 6 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 6 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha > 6 \end{cases} \quad f_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\frac{x^3}{2}}{\sqrt{\tanh(1)}} = 0$$

(Se esiste)

$$l_\alpha = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 \leq \alpha < 6 \\ +\infty & \text{se } \alpha = 6 \\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha > 6 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [7 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{e^{-2x}}{|e^x - 2|}\right)$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{\ln 2\}$$

(ii) Determinare le equazioni di eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

$$\lim_{x \rightarrow \ln 2} f(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{asintoto verticale}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ asintoto orizzontale per } x \rightarrow +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \text{ asintoto orizzontale per } x \rightarrow -\infty$$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \frac{e^{-4x}}{(e^x - 2)^2}} \cdot \frac{(-2e^{-2x})(e^x - 2) - e^{-2x} \cdot e^x \text{sgn}(e^x - 2)}{(e^x - 2)^2} = \frac{e^{-2x} \text{sgn}(e^x - 2) (4 - 3e^x)}{(e^x - 2)^2 + e^{-4x}}$$

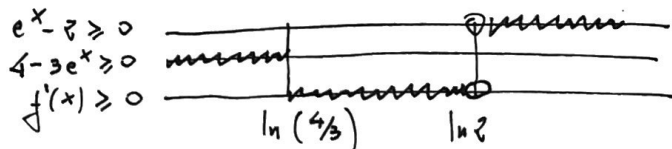
e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \text{sgn}(e^x - 2)(4 - 3e^x) > 0 \Leftrightarrow (e^x - 2)(4 - 3e^x) > 0$$

$$\Rightarrow \{f' > 0\} = \left[\ln\left(\frac{4}{3}\right), \ln 2\right]$$

$$\Rightarrow f \text{ è crescente su } \left[\ln\left(\frac{4}{3}\right), \ln 2\right]$$

$$f \text{ è decrescente su }]-\infty, \ln\left(\frac{4}{3}\right)] \text{ e su }]\ln 2, +\infty[$$



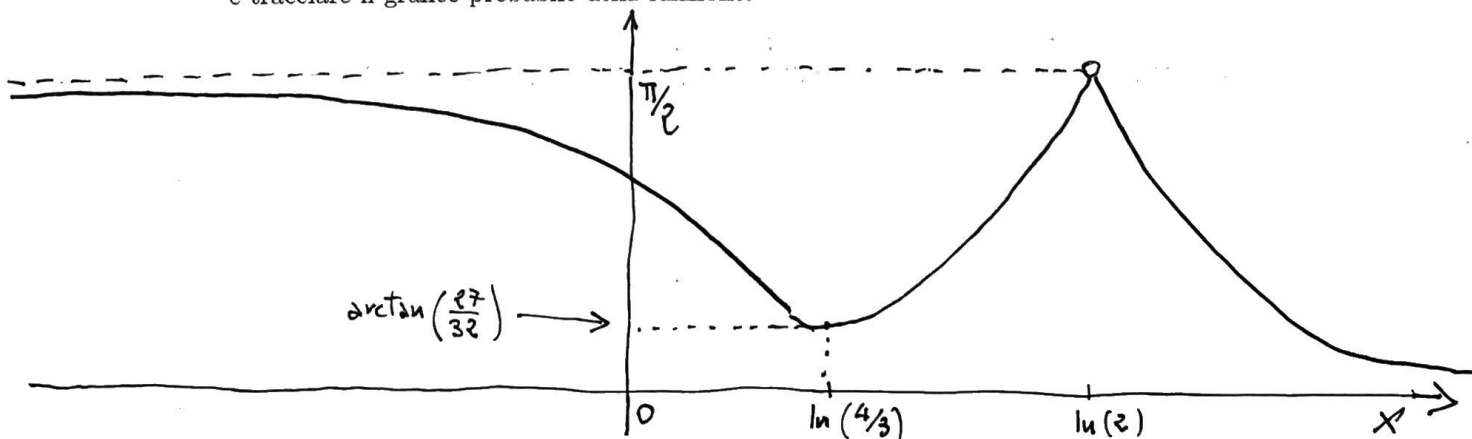
(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

$$\text{Punto di minimo relativo, non assoluto } x = \ln\left(\frac{4}{3}\right), f\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \arctan\left(\frac{3^3}{2 \cdot 4^2}\right) > 0$$

Non esistono punti di massimo relativo.

(v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =]0, \frac{\pi}{2}[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^2-1)}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^2-1)}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_1^2 \frac{(x^2-1)}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx, \quad I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{(x^2-1)}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx$$

$$i) \quad I_1 = \int_1^2 \frac{(x+1)(x-1)}{(\ln(1+(x-1)))^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx \sim \int_1^2 \frac{x-1}{(x-1)^{(\alpha/2)}} dx = \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{(\alpha/2-1)}} \text{ convergente } \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2}-1 < 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha < 4$$

$$\Rightarrow I_1 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha < 4 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha \geq 4 \end{cases}$$

$$ii) \quad I_2 \sim \int_2^{+\infty} \frac{x^2}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx = \int_2^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^{(\alpha-2)}} \text{ convergente } \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha-2 > 1 \\ \text{oppure} \\ \alpha-2=1, \frac{\alpha}{2} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > 3 \\ \text{oppure} \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_2 \text{ è } \begin{cases} \text{convergente se } \alpha \geq 3 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ se } \alpha < 3 \end{cases}$$

$$i) \text{ e } ii) \Rightarrow \int_1^{+\infty} \frac{(x^2-1)}{(\ln x)^{(\alpha/2)} x^\alpha} dx \text{ è } \begin{cases} \text{convergente se } 3 \leq \alpha < 4 \\ \text{divergente a } +\infty \text{ per gli altri } \alpha \end{cases}$$

ESERCIZIO 5. [5 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y' = y \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \exp(-x \ln x) \quad (1)$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

• Integrale generale dell'equazione omogenea associata a (1):

$$Y(x; c) = c e^{\int \ln(\frac{1}{x}) dx} = c e^{\int (-\ln x) dx} = c e^{(x - x \ln x)}, \quad c \in \mathbb{R}$$

• Integrale generale di (1):

$$Y(x; c) = e^{(x - x \ln x)} \left(c + \int e^{(x \ln x - x)} (-e^{(-x \ln x)}) dx \right) = e^{(x - x \ln x)} \left(c - \int e^{(-x)} dx \right)$$

$$= \frac{e^x}{e^{x \ln x}} (c + e^{-x}) = \frac{(1 + c e^x)}{x^x}$$

(ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy $\begin{cases} y' = y \ln\left(\frac{1}{x}\right) - \exp(-x \ln x), \\ y(1) = 0 \end{cases}$

(esplicitando i passaggi principali).

$$0 = Y(1; c) = \frac{(1 + c e)}{1} \Rightarrow c = -e^{-1}$$

$$\varphi(x) = \frac{1 - e^{(x-1)}}{x^x}$$

ESERCIZIO 6.

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - y' - 2y = 0 \quad (2)$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2$, $\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{matrix} -1 \\ 2 \end{matrix}$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$

$$\psi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - y' - 2y = 9 \exp(2x) \quad (3)$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\varphi(x) = k e^{2x}$

$$\varphi'(x) = e^{2x}(k + 2kx), \quad \varphi''(x) = e^{2x}(2k + 4kx + 2k) = e^{2x}(4k + 4kx)$$

$$\varphi''(x) - \varphi'(x) - 2\varphi(x) = k e^{2x}(4 + 4x - 1 - 2x - 2x) = 3k e^{2x}$$

$$\Rightarrow \varphi(x) \text{ è soluzione di (3)} \Leftrightarrow 3k = 9 \Leftrightarrow k = 3$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = 3x e^{2x}$$

$$\varphi(c_1, c_2; x) = c_1 e^{-x} + (c_2 + 3x) e^{2x}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 9 \exp(2x), \\ y(0) = 3, \quad y'(0) = 3. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\varphi'(x; c_1, c_2) = -c_1 e^{-x} + (2c_2 + 6x + 3) e^{2x}$$

$$\begin{cases} 3 = \varphi(0; c_1, c_2) = c_1 + c_2 \\ 3 = \varphi'(0; c_1, c_2) = -c_1 + 2c_2 + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 3 - c_2 \\ 3c_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 2 \end{cases}$$

$$\varphi(x) = 2e^{-x} + (1+3x)e^{2x}$$