II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. dell'Energia (II Squadra)

A.A. 2009/2010, 16 Febbraio 2010

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[7]{\frac{2+3n}{3n-5}} - \sqrt[5]{\frac{3n-20}{3n-5}}\right).$$

(Si ricordi lo sviluppo asintotico $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + o(x^2)$ per $x \to 0$).

Determinare lo sviluppo asintotico di $\sqrt[7]{\frac{2+3n}{3n-5}} - \sqrt[5]{\frac{3n-20}{3n-5}}$:

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{\alpha}{n}\right)^n$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.
(Può essere utile ricordare che vale la disuguaglianza $e > (1+\frac{1}{n})^n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$).

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = 2|\arctan x| - x\,.$$

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f.

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

(vi) Determinare l'immagine di f :

$$\mathrm{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \int_1^{|x-2|} e^{-|t^2-1|}\, dt$$

e si determini:

(i) l'insieme dei punti di continutà di f;

(ii) l'insieme dei punti di derivabilità di f

e se ne calcoli la derivata

$f'(x) =$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare del secondo ordine

$$\ddot{y} - \dot{y} - 6y = 5e^{3t} \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (cioè l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \varphi_{c_1,c_2}(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dell'equazione omogenea associata a (1)

$\varphi_{c_1,c_2}(t) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $t \mapsto \psi_{c_1,c_2}(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_{c_1,c_2}(t) =$

(iii) Determinare la soluzione $t \mapsto y(t)$, $t \in \mathbb{R}$, del problema

$$\begin{cases} \ddot{y} - \dot{y} - 6y = 5e^{3t} \\ y(0) = 1 \\ \lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 0\,. \end{cases}$$

$y(t) =$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da

$$f(x,y) = \ln\left(\frac{x}{y}\right) - y\ln x\,.$$

(i) Calcolare le derivate parziali della funzione

$$f_x(x,y) =$$

$$f_y(x,y) =$$

e determinare eventuali punti critici di f:

(ii) Calcolare la matrice Hessiana nei punti critici e determinare la natura dei punti critici di f.

(iii) Determinare l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(e,e,-e)$: