

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (V Canale)

A.A. 2011/2012, 16 Febbraio 2012

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [5 punti] Studiare il limite

$$\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2x^{2\alpha}}{\tan(\sin x)} + \frac{3x^{2\alpha}}{\ln(1-x)} \right) \left(1 - \cos\left(\frac{1}{x^\alpha}\right) \right)$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando le argomentazioni principali.

(Se esiste)

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 2. [4 punti] Studiare la convergenza semplice ed assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n! - n}{2n!} \right)^{n!}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da

$$f(x) = \left(\frac{9x - 14 - x^2}{|2 - x|} \right)^{|x-7|}$$

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui.

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f :

$$\text{Im}(f) =$$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{-1}^{\ln|x|} \frac{\tanh t}{t} dt$.

- (i) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività, specificando le argomentazioni principali.

$$\{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \geq 0\} =$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$x y' \ln y = y, \quad y \geq 1. \tag{1}$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1)

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x y' \ln y = y, \\ y(e) = e^2. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} e^{\left(\frac{x}{x-2}\right)^\alpha} x^{3\alpha} \ln x \, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.