

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)

A.A. 2012/2013, 18 Febbraio 2013

Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|

| |
|--|
| |
|--|

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - e^x - \operatorname{sen} x + x}{x^3}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $(1+x^2)^{\frac{1}{x}} - e^x - \operatorname{sen} x + x$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^3 + 7n^2}} - \frac{1}{\sqrt{n^3 + 5n^2 - 1}} \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) - \frac{1}{x+2}$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 1$:

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_x^{1/x} \frac{1}{\sqrt{1+t^4}} dt$.

- (i) Studiare il segno della funzione individuando l'insieme di positività, specificando le argomentazioni principali.

$$\{x \in \text{Dom}(f) : f(x) \geq 0\} =$$

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$2y y' = x(1 + y^2). \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y y' = x(1 + y^2), \\ y(0) = -1. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\text{sen}(x^\alpha)}{x^{(\alpha x)}} dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.