

# II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)  
A.A. 2012/2013, 18 Febbraio 2013

## Tema 2

COGNOME E NOME: .....

MATRICOLA: .....

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

**ESERCIZIO 1.** [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}} - e^x + \cos(x^2) - 1}{x^4}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di  $(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}} - e^x + \cos(x^2) - 1$  (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

**ESERCIZIO 2.** [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2 - 5n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n + 1}} \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

**ESERCIZIO 3.** [9 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \frac{1}{4-x} - \ln\left(1 - \frac{4}{x}\right)$ .

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di  $f$ .

- (v) Determinare l'immagine di  $f$  :  $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare quante soluzioni ha l'equazione  $f(x) = -1$  :

**ESERCIZIO 4.** [6 punti] Si consideri la funzione definita da  $f(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^6}} dt$ .

- (i) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, specificando le argomentazioni principali.

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

**ESERCIZIO 5.** [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y'e^y = x^2(1 + e^y). \tag{1}$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione  $x \mapsto \varphi(x)$  del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'e^y = x^2(1 + e^y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

**ESERCIZIO 6.** [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{(\alpha x)} \ln(1 + x^\alpha) dx$$

al variare del parametro  $\alpha \in \mathbb{R}$ , specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.