

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale, dell'Energia e Meccanica (I Canale)
A.A. 2012/2013, 18 Febbraio 2013

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4.5 punti] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}} - e^x + \cos(x^2) - 1}{x^4}.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $(1+x^3)^{\frac{1}{x^2}} - e^x + \cos(x^2) - 1$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [4.5 punti] Studiare il carattere (la convergenza) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 - 5n}} - \frac{1}{\sqrt{n^2 + 3n + 1}} \right)$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [9 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{1}{4-x} - \ln\left(1 - \frac{4}{x}\right)$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- (iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f .

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

- (vi) Determinare quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = -1$:

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_{1/x}^x \frac{1}{\sqrt[3]{1+t^6}} dt$.

- (i) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali ed obliqui, specificando le argomentazioni principali.

- (ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale

$$y'e^y = x^2(1 + e^y). \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) di (1) (esplicitando i passaggi principali).

- (ii) Determinare la soluzione $x \mapsto \varphi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'e^y = x^2(1 + e^y), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

$$\varphi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} x^{(\alpha x)} \ln(1 + x^\alpha) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.