II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)
A.A. 2013/2014, 13 Febbraio 2014
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{sen}x \cdot \ln x}{x^3 \ln x}\,.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) + 2\,\mathrm{sen}x \cdot \ln x$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n^2 \left(\sqrt[5]{1+\alpha^n} - 1\right)$$

al variare del parametro $\alpha \geq 0$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\,x$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione $g(x) = \left|\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}\,x\right|$.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\, dt\,.$

(i) Calcolare la derivata prima della funzione nei punti $x \neq 0$:

$$f'(x) =$$

e determinare (se esiste) il limite $\ell = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\ell =$$

(ii) Calcolare la derivata seconda della funzione nei punti $x \neq 0$:

$$f''(x) =$$

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = y\ln(\sqrt{x}) + e^{(x\ \ln(\sqrt{x}))}\,, \qquad x > 0\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y\ln(\sqrt{x}) + e^{(x\ \ln(\sqrt{x}))}\,, & x > 0\,, \\ y(1) = 3\,, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{3^{\left(\frac{2-\alpha}{x}\right)}}{x\sqrt[3]{1-x}}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.