II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale e Meccanica (I Canale)
A.A. 2013/2014, 13 Febbraio 2014
Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4.5 punti*] Calcolare il limite

$$\ell \doteq \lim_{x \to 0} \frac{6\big(\cos x - 1\big) \cdot \ln x - x^2 \ln\left(1 + \dfrac{1}{x^3}\right)}{x^4 \ln x}\,.$$

Determinare lo sviluppo asintotico di $6\big(\cos x - 1\big) \cdot \ln x - x^2 \ln\big(1 + \frac{1}{x^3}\big)$ (fornendo le argomentazioni principali):

(Se esiste)

$$\ell =$$

ESERCIZIO 2. [*4.5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, n^3 \left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{\alpha^n}} - 1 \right)$$

al variare del parametro $\alpha > 0$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 3. [*9 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \frac{\pi}{4\,x} - \arctan x$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

(vi) Tracciare il grafico probabile della funzione $g(x) = \left|\frac{\pi}{4\,x} - \arctan x\right|$.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{x^2} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt\,.$

(i) Calcolare la derivata prima della funzione nei punti $x \neq 0$:

$f'(x) =$

e determinare se f è derivabile in $x = 0$:

(ii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente e determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = y \ln\left(\frac{1}{x}\right) + e^x (1 + \ln x)\,, \qquad x > 0\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$\varphi_c(x) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_c(x) =$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y \ln\left(\frac{1}{x}\right) + e^x (1 + \ln x)\,, & x > 0\,, \\ y(1) = -3\,e\,, \end{cases}$$

$\psi(x) =$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^1 \frac{2^{\left(\frac{\alpha-1}{1-x}\right)}}{\sqrt{x}\,(1-x)^2}\,dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.