II APPELLO DI
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale

A.A. 2014/2015, 23 Febbraio 2015

Tema 1

Cognome e Nome: ....

Matricola: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*5 punti*] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1+\tan\left(\frac{1}{n}\right)}{(1+n)^{\alpha}}$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [*5 punti*] Studiare il limite $\ell \doteq \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cosh(\operatorname{settanh}(x)) - e^{\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Determinare lo sviluppo asintotico di $\cosh(\operatorname{settanh}(x)) - e^{\frac{x^2}{2}}$ (fornendo le argomentazioni principali):

$\ell =$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{1 - 4\ln^2 x}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare in quali punti la funzione è derivabile e calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

(iii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

(v) Determinare l'immagine di f : $\quad \mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_0^{e^x} \frac{t}{\ln t}\, dt\,.$

(i) Determinare il dominio della funzione e stabilire se ammette asintoti verticali, orizzontali od obliqui.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli

è monotona decrescente.

ESERCIZIO 5. [*6 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = y\ \ln(1+x) + (1+x)e^{(x\ \ln(1+x))}\,, \qquad x > -1\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y\ \ln(1+x) + (1+x)e^{(x\ \ln(1+x))}\,, & x > -1\,, \\ y(0) = 0\,, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [*6 punti*] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) \ln(1 + x^\alpha)\, dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.