

II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale
A.A. 2014/2015, 23 Febbraio 2015

Tema 2

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [5 punti] Studiare il carattere (la convergenza semplice ed assoluta) della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 + \tanh\left(\frac{1}{n}\right) \right) (1+n)^\alpha$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [5 punti] Studiare il limite $\ell \doteq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\arctan(x)) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

Determinare lo sviluppo asintotico di $\cos(\arctan(x)) - e^{-\frac{x^2}{2}}$ (fornendo le argomentazioni principali):

$\ell =$

ESERCIZIO 3. [8 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arccos(\sqrt{1 - 9 \ln^2 x})$.

- (i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

- (ii) Determinare in quali punti la funzione è derivabile e calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

- (iii) Stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

- (iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

- (v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [6 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \int_0^{e^{-x}} \frac{t}{\ln t} dt$.

- (i) Determinare il dominio della funzione e calcolare la derivata prima.

$$\text{Dom}(f) = \qquad f'(x) =$$

- (ii) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

ESERCIZIO 5. [6 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = y \ln(1-x) + \frac{e^{(x \ln(1-x))}}{(1-x)}, \quad x < 1. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = y \ln(1-x) + \frac{e^{(x \ln(1-x))}}{(1-x)}, & x < 1, \\ y(0) = 2, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6. [6 punti] Studiare la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \left(\cos \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x}} \right) - 1 \right) \ln \left(1 + \frac{1}{x^\alpha} \right) dx$$

al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.