II APPELLO DI ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2020/2021, 15 Febbraio 2021

Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5		

ESERCIZIO 1. [*6 punti*] Studiare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{\frac{\pi}{8}} \frac{\sin^2(x)}{\left|\ln(\cos(x))\right|^{\alpha} \cdot \cos(2x)}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [*7 punti*] Studiare il limite $\ell \doteq \lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(\arctan(x)) - \cos(x)}{\ln(1+x^2) - \sin(x^2)}$. Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to 0$) di:

$$\cos(\arctan(x)) - \cos(x)$$

e di:

$$\ln(1+x^2) - \sin(x^2)$$

(fornendo le argomentazioni principali).

Determinare il limite

$$\ell =$$

ESERCIZIO 3. [*10 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \arctan\left(\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

(v) Calcolare la derivata seconda della funzione

$$f''(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è convessa, ed in quali intervalli è concava.

(vi) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [*6 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = \displaystyle\int_{x^2}^{2x^2} \frac{e^{-t}-1}{t}\, dt$.

(i) Determinare il dominio della funzione e l'insieme di non positività

$\mathrm{Dom}(f) =$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\{f \le 0\} =$

(ii) Calcolare la derivata prima della funzione

$f'(x) =$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

ESERCIZIO 5. [*7 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\big(1+\sin^2(x)\big)\cdot \dot y = \cos(x)\cdot \big[y + (1+\sin^2(x))\exp\big(\arctan(\sin(x))\big)\big]\,. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$\varphi_c(x) =$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$\psi_c(x) =$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \big(1+\sin^2(x)\big)\cdot \dot y = \cos(x)\cdot \big[y + (1+\sin^2(x))\exp(\arctan(\sin(x)))\big]\,, \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0\,, \end{cases}$$

$\psi(x) =$