II APPELLO di
ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2021/2022, 14 Febbraio 2022
Tema 1

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty} n! \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

Utilizziamo il criterio del rapporto: $\lim_n (n+1)! \left(\frac{4}{n+1}\right)^{(n+1)} \cdot \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{4}\right)^n = \lim_n (n+1)\cdot 4 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{(n+1)}} =$

$$= \lim_n 4 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 4 \cdot \lim_n \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} = 4 \cdot e^{-1} > 1$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{4}{n}\right)^n$ è ~~convergente~~ divergente a $+\infty$

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x)}{\ln(2+x^2) - \ln(x^2)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to +\infty$) di: $\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x)$, ed il limite ℓ_α, fornendo le argomentazioni principali.

- $\cos\left(\frac{2}{x}\right) - e^{(\alpha/x^2)} - e^{(-2x)} = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{16}{24x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1 - \frac{\alpha}{x^2} - \frac{\alpha^2}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$

$$= -(2+\alpha)\cdot\frac{1}{x^2} + \left(\frac{2}{3} - \frac{\alpha^2}{2}\right)\cdot\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \to +\infty$$

$\left(e^{-2x} = o\left(\frac{1}{x^4}\right) \text{ per } x \to +\infty\right)$

- $\ln(2+x^2) - \ln(x^2) = \ln\left(\frac{2+x^2}{x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{2}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$

$$\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x) = \begin{cases} -(2+\alpha)\cdot\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{se } \alpha \neq -2 \\ -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{se } \alpha = -2 \end{cases}$$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} -\left(1+\alpha/2\right) & \text{se } \alpha \neq -2 \\ 0 & \text{se } \alpha = -2 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = |4x+3| \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ asintoto verticale unilatero
- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 4$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) - 4x = \lim_{x\to+\infty} 4x(e^{\frac{1}{x}}-1)+3e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} 4x\cdot\left(\frac{1}{x}\right)+3 = 7$

$\Rightarrow y = 4x+7$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -4$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)+4x = \lim_{x\to-\infty} 4x(1-e^{\frac{1}{x}}) - 3e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to-\infty} (4x)\cdot\left(\frac{-1}{x}\right) - 3 = -7$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione $\Rightarrow y = -4x-7$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$f'(x) = 4\,\mathrm{sgn}(4x+3)\,e^{\frac{1}{x}} + |4x+3|\,e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{sgn}(4x+3)\,e^{\frac{1}{x}}\left(4+(4x+3)\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{\mathrm{sgn}(4x+3)\,e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\cdot(4x^2-4x-3)$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow (4x+3)(4x^2-4x-3) \geq 0 \Rightarrow \{f' \geq 0\} = \left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

f è monotona crescente su $\left[-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right]$ e su $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$

f è monotona decrescente su $\left]-\infty, -\frac{3}{4}\right]$, su $\left[-\frac{1}{2}, 0\right[$ e su $\left]0, \frac{3}{2}\right]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punti di minimo relativo: $x = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = 9e^{\frac{2}{3}}$

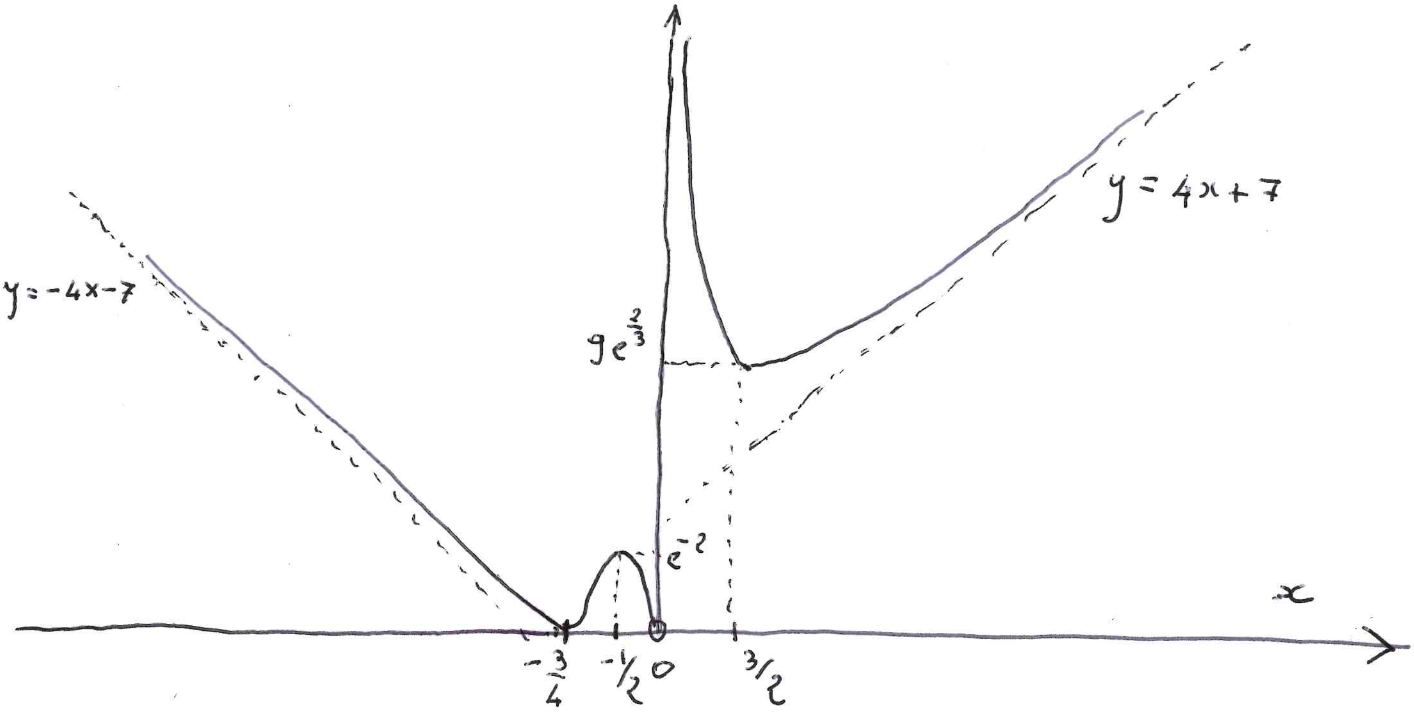
Punto di minimo assoluto: $x = -\frac{3}{4}$, $f\left(-\frac{3}{4}\right) = 0$

Punto di massimo relativo: $x = -\frac{1}{2}$, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = e^{-2}$

$\nexists$ punti di massimo assoluto.

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \exp\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\sqrt{\sinh x}}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{\sinh x}}\, dx = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{\sinh x}}\, dx, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{\sinh x}}\, dx$$

i) $I_1 \sim \int_0^1 \frac{x^\alpha e^{\alpha/x}}{\sqrt{x}}\, dx$, se $\alpha > 0$ confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{1}{x}\, dx$ divergente a $+\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} =$
$= \lim_{x\to 0^+} x^{(\alpha+1-1/2)} e^{(\alpha/x)} = +\infty \Rightarrow I_1$ è divergente a $+\infty$ $\forall \alpha > 0$. Se $\alpha \leq 0$ confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ convergente, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} x^\alpha e^{(\alpha/x)} \in \mathbb{R} \Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha \leq 0$.

$$\Rightarrow I_1 \text{ è } \begin{cases} \text{divergente a } +\infty & \forall \alpha > 0 \\ \text{convergente} & \forall \alpha \leq 0 \end{cases}$$

ii) $I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\sqrt{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}}\, dx \sim \int_1^{+\infty} \frac{x^\alpha}{e^{x/2}}\, dx$, confronto asintotico con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^\alpha}{e^{x/2}}}{\frac{1}{x^2}} =$
$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{(\alpha+2)}}{e^{x/2}} = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow I_2$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

i) e ii) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha e^{(\alpha/x)}}{\sqrt{\sinh x}}\, dx$ è $\begin{cases} \text{convergente} & \forall \alpha \leq 0 \\ \text{divergente a } +\infty & \forall \alpha > 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{2x\, \cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}\, y + x\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)^2. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) = c\, e^{\int \frac{2x\cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}dx} = c\, e^{\ln(\operatorname{sen}(x^2))} = c\, \operatorname{sen}(x^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) = \operatorname{sen}(x^2)\left[c + \int \frac{x(\operatorname{sen}(x^2))^2}{\operatorname{sen}(x^2)}\, dx\right] = \operatorname{sen}(x^2)\left[c - \frac{\cos(x^2)}{2}\right], \quad c \in \mathbb{R}$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \dfrac{2x\, \cos(x^2)}{\operatorname{sen}(x^2)}\, y + x\left(\operatorname{sen}(x^2)\right)^2, \\ y\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 5, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \operatorname{sen}(x^2)\left[5 - \frac{\cos(x^2)}{2}\right]$$

$$\left(5 = \psi_c\left(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}}\right) = 1 \cdot [c - 0] = c \Rightarrow c = 5\right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico: $P(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 5$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 4\cos x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x$

$\Psi'(x) = -K_1 \operatorname{sen} x + K_2 \cos x, \quad \Psi''(x) = -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x$

$$\Psi''(x) - 4\Psi'(x) + 3\Psi(x) = -K_1 \cos x - K_2 \operatorname{sen} x - 4K_2 \cos x + 4K_1 \operatorname{sen} x + 5K_1 \cos x + 5K_2 \operatorname{sen} x$$
$$= 4(K_1 - K_2)\cos x + 4(K_2 + K_1)\operatorname{sen} x$$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow K_1 - K_2 = 1,\ K_2 + K_1 = 0 \Leftrightarrow K_1 = \frac{1}{2},\ K_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x$

$$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2; x) = \left(e^{2x} c_1 + \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(e^{2x} c_2 - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 4\cos x\,, \\ y(0) = 2, \qquad y'(0) = 4\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^{2x}\left((2c_1 + c_2)\cos x + (2c_2 - c_1)\operatorname{sen} x\right) - \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x$$

$2 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 + \frac{1}{2} \Rightarrow c_1 = \frac{3}{2}, \quad 4 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 2c_1 + c_2 - \frac{1}{2} = 3 - \frac{1}{2} + c_2 = \frac{5}{2} + c_2$

$\Rightarrow c_2 = 4 - \frac{5}{2} = \frac{3}{2}$

$$\boxed{\psi(x) = \left(\frac{3}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\right)\cos x + \left(\frac{3}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\right)\operatorname{sen} x}$$