II APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)

A.A. 2021/2022, 14 Febbraio 2022

Tema 2

COGNOME E NOME: ....

MATRICOLA: ....

1	2	3	4	5	6	

ESERCIZIO 1. [*4 punti*] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{n}{3}\right)^{n}\frac{1}{n!}$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

Utilizziamo il criterio del rapporto:

$$\lim_n \left(\frac{n+1}{3}\right)^{(n+1)} \cdot \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! \left(\frac{3}{n}\right)^n = \lim_n \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(n+1)}{(n+1)} = \frac{1}{3} \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{3} < 1$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3}\right)^n \cdot \frac{1}{n!} \text{ è convergente}$$

ESERCIZIO 2. [*6 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x\to+\infty} \dfrac{1+\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x}\right) + \exp(-3x)}{\ln(3+2x^2) - \ln(2x^2)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \to +\infty$) di: $1+\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x}\right) + \exp(-3x)$, ed il limite ℓ_α, fornendo le argomentazioni principali.

- $1+\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) - e^{(\alpha/x)} = 1 + \frac{3}{x} - \frac{9}{2x^3} + o\left(\frac{1}{x^4}\right) - 1 - \frac{\alpha}{x} - \frac{\alpha^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$= \frac{(3-\alpha)}{x} - \frac{\alpha^2}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$

$\left(e^{-3x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right) \text{ per } x \to +\infty\right)$

- $\ln(3+2x^2) - \ln(2x^2) = \ln\left(\frac{3+2x^2}{2x^2}\right) = \ln\left(1+\frac{3}{2x^2}\right) = \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ per $x \to +\infty$

$$1+\operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x}\right) + \exp(-3x) = \begin{cases} \frac{3-\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) & \text{per } x\to+\infty \quad \text{se } \alpha \neq 3 \\ -\frac{9}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{per } x\to+\infty \quad \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\ell_\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha < 3 \\ -\infty & \text{se } \alpha > 3 \\ -3 & \text{se } \alpha = 3 \end{cases}$$

ESERCIZIO 3. [*8 punti*] Si consideri la funzione definita da $f(x) = |9x+4| \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

• $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ asintoto verticale unilatero

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 9$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - 9x = \lim_{x \to +\infty} 9x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) + 4e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} 9x \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 4 = 13$

$\Rightarrow y = 9x + 13$ asintoto obliquo per $x \to +\infty$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -9$, $\lim_{x \to -\infty} f(x) + 9x = \lim_{x \to -\infty} 9x\left(1 - e^{\frac{1}{x}}\right) - 4e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to -\infty} 9x \cdot \left(\frac{-1}{x}\right) - 4 = -13$

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$\Rightarrow y = -9x - 13$ asintoto obliquo per $x \to -\infty$

$$f'(x) = 9\,\mathrm{sgn}(9x+4)\, e^{\frac{1}{x}} + |9x+4|\, e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \mathrm{sgn}(9x+4)\, e^{\frac{1}{x}} \left(9 + (9x+4)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\right) = \frac{\mathrm{sgn}(9x+4) \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot (9x^2 - 9x - 4)$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

$f'(x) \geq 0 \iff (9x+4)(9x^2 - 9x - 4) \geq 0 \Rightarrow \{f' \geq 0\} = \left[-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$

f è monotona crescente su $\left[-\frac{4}{9}, -\frac{1}{3}\right]$ e su $\left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$

f è monotona decrescente su $\left]-\infty, -\frac{4}{9}\right]$, su $\left[-\frac{1}{3}, 0\right[$ e su $\left]0, \frac{4}{3}\right]$

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

Punti di minimo relativo : $x = \frac{4}{3}$, $f\left(\frac{4}{3}\right) = 16\, e^{3/4}$

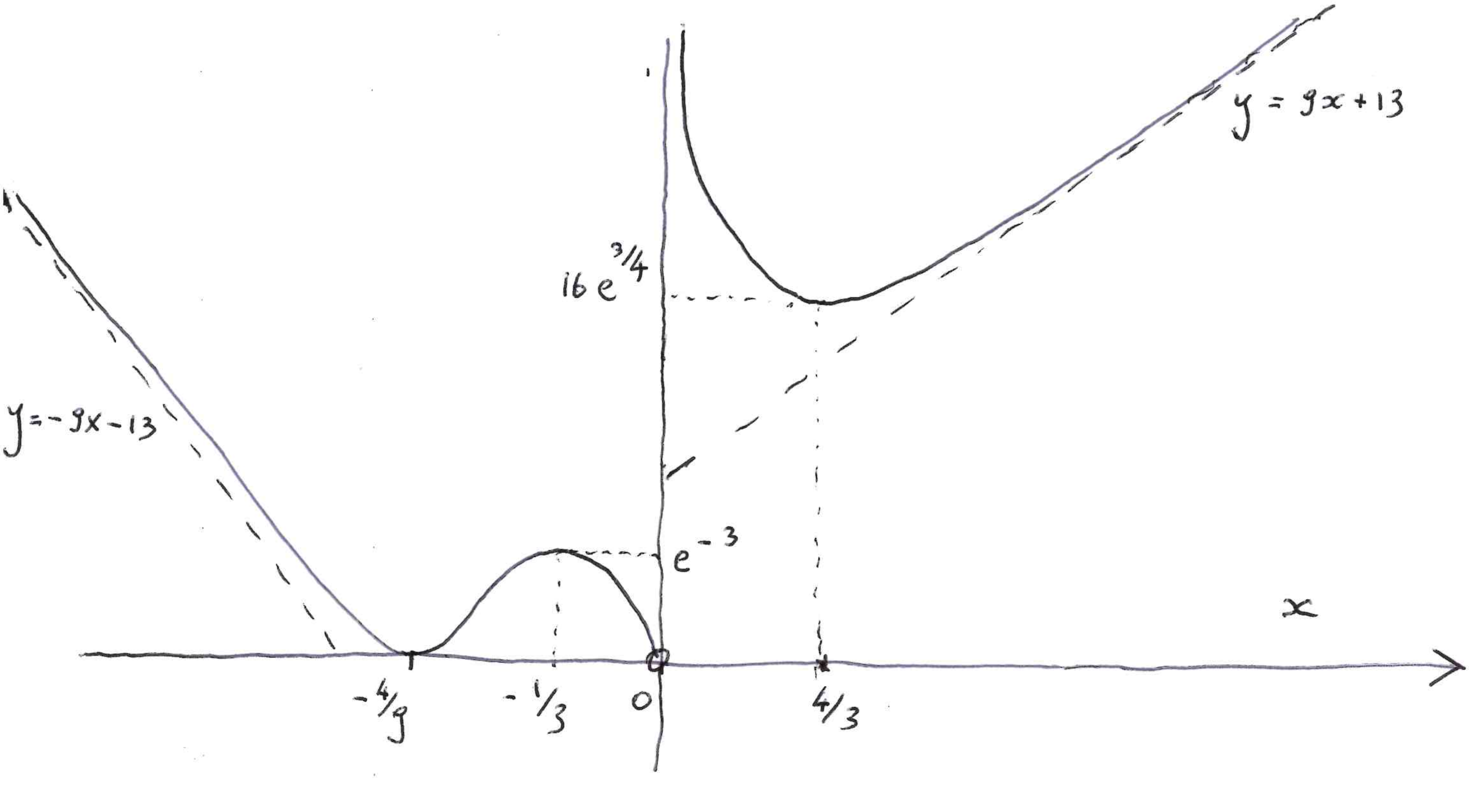
Punto di minimo assoluto : $x = -\frac{4}{9}$, $f\left(-\frac{4}{9}\right) = 0$

Punto di massimo relativo : $x = -\frac{1}{3}$, $f\left(-\frac{1}{3}\right) = e^{-3}$

$\nexists$ punti di massimo assoluto

(v) Determinare l'immagine di f : $\mathrm{Im}(f) = [0, +\infty[$

e tracciare il grafico probabile della funzione.



ESERCIZIO 4. [*7 punti*] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{\exp\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{x^\alpha \sqrt{\cosh x - 1}}\, dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha/x)}\, dx}{x^\alpha \sqrt{\cosh x - 1}} = I_1 + I_2, \quad I_1 = \int_0^1 \frac{e^{(\alpha/x)}\, dx}{x^\alpha \sqrt{\cosh x - 1}}, \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{(\alpha/x)}\, dx}{x^\alpha \sqrt{\cosh x - 1}}$$

i) $I_1 \sim \int_0^1 \frac{e^{(\alpha/x)}}{x^{(\alpha+1)}} dx$, se $\alpha \geq 0$ confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergente a $+\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{(\alpha/x)}}{x^{(\alpha+1)}}}{\frac{1}{x}} =$ $= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{(\alpha/x)}}{x^\alpha} > 0 \Rightarrow I_1$ è divergente a $+\infty$ $\forall \alpha \geq 0$. Se $\alpha < 0$ confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ convergente, $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^{(\alpha/x)}}{x^{(\alpha+1)}}}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{(\alpha/x)}}{x^{(\alpha+1/2)}} = 0 \Rightarrow I_1$ è convergente $\forall \alpha < 0$.

$\Rightarrow I_1$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < 0 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 0 \end{cases}$

ii) $I_2 \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha \sqrt{\frac{e^x + e^{-x}}{2} - 1}} \sim \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha e^{x/2}}$, confronto asintotico con $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ convergente, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x^\alpha e^{x/2}}}{\frac{1}{x^2}} =$ $= \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{(\alpha-2)} e^{x/2}} = 0$ $\forall \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow I_2$ è convergente $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

i) e ii) $\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{e^{(\alpha/x)}}{x^\alpha \sqrt{\cosh x - 1}} dx$ è $\begin{cases} \text{convergente } \forall \alpha < 0 \\ \text{divergente a } +\infty \ \forall \alpha \geq 0 \end{cases}$

ESERCIZIO 5. [*5 punti*] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = -\frac{2x \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)}\, y + x\big(\cos(x^2)\big)^2. \tag{1}$$

(i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) = c\, e^{\int \frac{-2x \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)} dx} = c\, e^{\ln(\cos(x^2))} = c \cdot \cos(x^2), \quad c \in \mathbb{R}$$

(ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) = \cos(x^2) \left[c + \int \frac{x(\cos(x^2))^2}{\cos(x^2)} dx \right] = \cos(x^2) \left[c + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} \right], \quad c \in \mathbb{R}$$

(iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = -\dfrac{2x \operatorname{sen}(x^2)}{\cos(x^2)}\, y + x\big(\cos(x^2)\big)^2, \\ y(0) = -3, \end{cases}$$

$$\psi(x) = \cos(x^2) \left[-3 + \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2} \right]$$

$$\left(-3 = \psi_c(0) = 1 \cdot [c + 0] = c \Rightarrow c = -3 \right)$$

ESERCIZIO 6.

(i) [*2 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6y' + 10y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Polinomio caratteristico : $P(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda + 10$

Radici di $P(\lambda)$: $\lambda_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-10} = 3 \pm i$

$$\phi(c_1, c_2; x) = e^{3x}\left(c_1 \cos x + c_2 \,\mathrm{sen}\, x\right), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(ii) [*2.5 punti*] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 6y' + 10y = -13\,\mathrm{sen}x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

Soluzione particolare di (3) della forma $\Psi(x) = K_1 \cos x + K_2 \,\mathrm{sen}\, x$

$\Psi'(x) = -K_1 \,\mathrm{sen}\, x + K_2 \cos x$, $\Psi''(x) = -K_1 \cos x - K_2 \,\mathrm{sen}\, x$

$\Psi''(x) - 6\Psi'(x) + 10\Psi(x) = -K_1 \cos x - K_2 \,\mathrm{sen}\, x - 6K_2 \cos x + 6K_1 \,\mathrm{sen}\, x + 10K_1 \cos x + 10K_2 \,\mathrm{sen}\, x$

$= (9K_1 - 6K_2)\cos x + (6K_1 + 9K_2)\,\mathrm{sen}\, x$

$\Rightarrow \Psi(x)$ è soluzione di (3) $\Leftrightarrow 9K_1 - 6K_2 = 0,\ 6K_1 + 9K_2 = -13$

$\Leftrightarrow K_1 = -2/3,\ K_2 = -1$

$\Rightarrow$ una soluzione di (3) è $\Psi(x) = -\frac{2}{3}\cos x - \mathrm{sen}\, x$

$$\psi(c_1, c_2; x) = \Psi(x) + \phi(c_1, c_2, x) = \left(e^{3x} c_1 - \frac{2}{3}\right)\cos x + \left(e^{3x} c_2 - 1\right)\mathrm{sen}\, x, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

(iii) [*1.5 punti*] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 10y = -13\,\mathrm{sen}x\,, \\ y(0) = 1, \qquad y'(0) = 2\,. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$\Psi'(c_1, c_2; x) = e^{3x}\left((3c_1 + c_2)\cos x + (3c_2 - c_1)\,\mathrm{sen}\, x\right) + \frac{2}{3}\,\mathrm{sen}\, x - \cos x$

$1 = \Psi(c_1, c_2; 0) = c_1 - \frac{2}{3} \Rightarrow c_1 = \frac{5}{3}$, $2 = \Psi'(c_1, c_2; 0) = 3c_1 + c_2 - 1 = 5 + c_2 - 1 = 4 + c_2$

$\Rightarrow c_2 = -2$

$$\boxed{\psi(x) = \left(\frac{5}{3} e^{3x} - \frac{2}{3}\right)\cos x + \left(-2e^{3x} - 1\right)\mathrm{sen}\, x}$$