

II APPELLO di ANALISI MATEMATICA 1

Ing. Aerospaziale (Canale A)
A.A. 2021/2022, 14 Febbraio 2022

Tema 1

COGNOME E NOME:

MATRICOLA:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

--

ESERCIZIO 1. [4 punti] Studiare la convergenza della serie

$$\sum_1^{\infty} n! \left(\frac{4}{n}\right)^n$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 2. [6 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ il limite $\ell_\alpha \doteq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x)}{\ln(2+x^2) - \ln(x^2)}$.

Determinare lo sviluppo asintotico (per $x \rightarrow +\infty$) di: $\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x)$, ed il limite ℓ_α , fornendo le argomentazioni principali.

$$\cos\left(\frac{2}{x}\right) - \exp\left(\frac{\alpha}{x^2}\right) + \exp(-2x) =$$

$$\ell_\alpha =$$

ESERCIZIO 3. [8 punti] Si consideri la funzione definita da $f(x) = |4x + 3| \exp\left(\frac{1}{x}\right)$.

(i) Determinare il dominio della funzione.

$$\text{Dom}(f) =$$

(ii) Determinare eventuali asintoti verticali, orizzontali, obliqui

(iii) Calcolare la derivata prima della funzione

$$f'(x) =$$

e stabilire in quali intervalli la funzione è monotona crescente, ed in quali intervalli è monotona decrescente.

(iv) Determinare eventuali punti di massimo o di minimo relativo ed assoluto di f ed i corrispondenti valori di minimo e di massimo.

(v) Determinare l'immagine di f : $\text{Im}(f) =$

e tracciare il grafico probabile della funzione.

ESERCIZIO 4. [7 punti] Studiare al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \exp\left(\frac{\alpha}{x}\right)}{\sqrt{\sinh x}} dx$$

specificando i criteri usati e le argomentazioni principali.

ESERCIZIO 5. [5 punti] Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$\dot{y} = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2)} y + x(\sin(x^2))^2. \quad (1)$$

- (i) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \varphi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione differenziale lineare omogenea associata a (1)

$$\varphi_c(x) =$$

- (ii) Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) $x \mapsto \psi_c(x)$, $c \in \mathbb{R}$, dell'equazione completa (1)

$$\psi_c(x) =$$

- (iii) Determinare la soluzione $x \mapsto \psi(x)$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \frac{2x \cos(x^2)}{\sin(x^2)} y + x(\sin(x^2))^2, \\ y(\sqrt{\frac{\pi}{2}}) = 5, \end{cases}$$

$$\psi(x) =$$

ESERCIZIO 6.

- (i) [2 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 0 \tag{2}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\phi(c_1, c_2; x) =$$

- (ii) [2.5 punti] Determinare l'integrale generale (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale lineare del second'ordine

$$y'' - 4y' + 5y = 4 \cos x \tag{3}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(c_1, c_2; x) =$$

- (iii) [1.5 punti] Determinare la soluzione ψ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 4 \cos x, \\ y(0) = 2, \quad y'(0) = 4. \end{cases}$$

(esplicitando i passaggi principali).

$$\psi(x) =$$